

Algebra liniowa 2

lista 6 (wykład 20.04, ćwiczenia 22.04.2020)

Ćwiczenia

1. Znajdź wartości własne i przestrzenie własne dla każdej z poniższych macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ustal, które z macierzy z poprzedniego ćwiczenia są diagonalizowalne i je zdiagonalizuj.
3. Oblicz następujące potęgi macierzy

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$$

4. Wyznacz pierwiastki każdego z wielomianów: $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$, $x^3 - 2x + 1$.

Zadania

1. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i przestrzenie własne każdego z poniższych przekształceń:

(a) $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = xP'(x) + P''(x)$

(b) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $F(A) = 2A + A^T$

(c) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \\ z+t \\ z-t \end{pmatrix}$

(d) $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $F(P)(x) = P(3x+1)$

2. Napisz macierz 4×4 o wartościach własnych $-1, 1, 0, 2$ i odpowiadających im wektorach własnych $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Napisz macierz 4×4 , dla której $V^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x = y = z = t \right\}$ i $V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : 2x + 3y + z + t = 0 \right\}$.

Wskazówka: napisz diagonalizację tej macierzy.

4. Napisz macierz przekształcenia $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ takiego, że $F(x^2 + x) = 2x^2 + 2x$, $F(x - 1) = 1 - x$, $F(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$:

(a) w bazie $\mathcal{B}$ złożonej z wektorów własnych (wskaz tę bazę),

(b) w bazie $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

5. Co wiadomo o wartościach własnych i wektorach własnych takiego przekształcenia $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, dla którego $\ker F = \text{Lin}\{x^2 + x + 1, 2x^2 - x - 1\}$? Napisz macierz dowolnego przekształcenia o tej własności:

(a) w dowolnie wybranej bazie $\mathcal{B}$ (podaj tę bazę),

(b) w bazie $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

Zacznij od napisania diagonalizacji macierzy przekształcenia.

6. Uzasadnij, że wartościami własnymi macierzy górnotrójkątnej są wyrazy na przekątnej macierzy.
7. Uzasadnij, że jeśli wielomian charakterystyczny macierzy ma tylko jeden pierwiastek, to macierz ta jest diagonalizowalna jedynie wtedy, gdy jest diagonalna. Wskazówka: napisz diagonalizację macierzy z jedyną wartością własną.
8. Ustal wartości i przestrzenie własne macierzy $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Czy są one diagonalizowalne?
9. *Sprawdź, że jeśli v jest wektorem własnym A dla wartości własnej λ , a P jest macierzą odwracalną, to Pv jest wektorem własnym PAP^{-1} dla wartości własnej λ . Wywnioskuj stąd, że wymiary przestrzeni własnych macierzy A i PAP^{-1} są jednakowe.

10. *Wykorzystaj zadania 8 i 9 do podania różnych przykładów macierzy niediagonalizowalnych, rozmiaru 2×2 , 3×3 i 4×4 .
11. *Wykorzystaj zadania 8 i 9 do podania różnych przykładów macierzy 4×4 , której wielomian charakterystyczny jest postaci $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$, ale przestrzenie własne V^2 i V^{-1} są jednowymiarowe.