

Algebra liniowa 2

lista 7 (wykład 27.04, ćwiczenia 29.04.2020)

Ćwiczenia

- Dla których z poniższej podanych podprzestrzeni $W, U < \mathbb{R}^3$ prawdą jest, że $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$?
 - $W = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0\right\}$
 - $W = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0\right\}$
 - $W = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\right\}$
- Podaj wymiar i wskaż bazę każdej z następujących przestrzeni: $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}_n[x], M_{n \times n}(\mathbb{C})$ traktowanych (a) jako rzeczywiste przestrzenie liniowe, (b) jako zespolone przestrzenie liniowe.
- Sprawdź, czy podany układ wektorów jest bazą zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^3$.
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}$
- Oblicz następujące potęgi macierzy:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{20} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Zadania

- Napisz (a) zespoloną diagonalizację, (b) rzeczywistą klatkową diagonalizację następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

- Czy prawdą jest, że:
 - $\mathbb{R}^3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0\right\} \oplus \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$
 - $M_{2 \times 2} = \{A \in M_{2 \times 2} : A \text{ diagonalna}\} \oplus \{A \in M_{2 \times 2} : \text{tr} A = 0\},$
 - $\mathbb{R}_3[x] = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P'' = 0\} \oplus \{ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}.$
- Znajdź jakąkolwiek przestrzeń dopełniczą każdej z poniższych podprzestrzeni $W < V$, tzn. taką podprzestrzeń $W' < V$, że $V = W \oplus W'$. Wybierz możliwie najprostsze W' .
 - $\text{Lin}\{1 + x, x^2\} < \mathbb{R}_2[x],$
 - $\text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} < \mathbb{R}^4.$
- Które z poniższych zbiorów (ze standardowo zdefiniowanymi działaniami) tworzą zespoloną przestrzeń liniową:
 - zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 - zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
 - zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- Ustal, które z podanych poniżej zbiorów są podprzestrzeniami rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$, a które są podprzestrzeniami zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$:
 - $\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : 2z_1 + z_2 = 0\right\}$
 - $\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : (i+1)z_1 + (i-1)z_2 = 0\right\}$
 - $\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : z_1 = \bar{z}_2\right\}$
 - $\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : z_1 + \bar{z}_2 = 0\right\}$
- Które z poniższych przekształceń są rzeczywistymi przekształceniami liniowymi rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$, a które są zespolonymi przekształceniami liniowymi zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$. Napisz macierze tych przekształceń, które są liniowe, w dowolnie wybranych bazach (wskaż te bazy).
 - $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$
 - $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} iz_1 + z_2 \\ z_1 - iz_2 \end{pmatrix}$
 - $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$