

Algebra liniowa 2

lista 8 (wykład 4.05, ćwiczenia 6.05.2020)

Ćwiczenia

1. Zaznacz klatki Jordana i oblicz n -tą potęgę każdej z następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Wyznacz postać Jordana macierzy, dla której $(\chi(\lambda))$ oznacza wielomian charakterystyczny):

- (a) $\chi(\lambda) = (3 - \lambda)^2(1 - \lambda)^3$, $\dim V^3 = 2$, $\dim V^1 = 1$
(b) $\chi(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$, $\dim V^0 = 1$, $\dim V^{-2} = 2$
(c) $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)^4(\lambda - 2)^2$, $\dim V^{-1} = 2$, $\dim V^2 = 1$

3. Oblicz następujące potęgi macierzy, sprowadzając je najpierw do postaci Jordana:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{20} \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}^n$$

Zadania

1. Wskaż przykład macierzy 3×3 , która nie jest górnotrójkątna, ma wartości własne 1 i 2 oraz $\dim V^1 = \dim V^2 = 1$.
2. Wyznacz postać Jordana i bazę jordanowską każdej z następujących macierzy. Jeśli trzeba, użyj liczb zespolonych.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Oblicz A^n , gdzie A jest jedną z poniższych macierzy. Jeśli trzeba, użyj liczb zespolonych.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$$

4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Dla każdego $1 \leq d \leq 5$ wskaż przykład macierzy 5×5 z jedną wartością własną λ , dla której $\dim V^\lambda = d$.
6. Uzasadnij, że jeśli wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\chi(\lambda) = \lambda^4$, to $A^4 = 0$.
7. Uzasadnij, że jeśli $A^n = 0$ dla pewnego n naturalnego, to wielomian charakterystyczny A ma tylko jeden pierwiastek.
8. * O pewnej macierzy kwadratowej A wiadomo, że $A^n = I$ dla pewnego $n > 1$. Udowodnij, że A jest diagonalizowalna. Jakie mogą być jej wartości własne? Wskazówka: zapisz A w postaci Jordana i użyj liczb zespolonych.