

6. KRÓTKA TEORIA CAŁKI RIEMANNA W $\mathbf{R}^n$

1. Miara Jordana. Zbiory postaci

$$(6.1) \quad A = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k)$$

będziemy nazywali przedziałami (półotwartymi) w $\mathbf{R}^n$. Liczbę

$$|A| = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

nazwiemy objętością przedziału.

6.2. *Jeśli A i B są przedziałami, to $A \cap B$ jest także przedziałem, natomiast $A \setminus B$ jest sumą nie więcej niż $2n$ rozłącznych przedziałów.*

Rozbiciem przedziału A będziemy nazywali rodzinę parami rozłącznych podprzedziałów $\pi = \{A_k\}$, taką że $A = \bigcup_k A_k$. Rodzinę wszystkich rozbić A oznaczymy przez $\mathcal{P}_A$.

6.3. *Dla każdej pary rozłącznych przedziałów A_1, A_2 istnieje rozdzielająca je hiperpłaszczyzna.*

Dowód. Istnieje oś, powiedzmy o numerze j , taka że rzuty A_1 i A_2 są rozłączne. Zatem dla pewnej liczby

$$A_1 \subset \{x \in A : x_j < c\}, \quad A_2 \subset \{x \in A : x_j \geq c\}.$$

□

6.4. *Jeśli $\{A_k\}$ jest rozbiem A , to ,*

$$|A| = \sum_{k=1}^n |A_k|.$$

Dowód. Niech

$$A = \bigcup_{k=1}^N A_k \subset \mathbf{R}^n,$$

gdzie suma jest rozłączna i A_k są niepuste. Przeprowadzimy indukcję ze względu na N . Jeśli $N = 1$, to nie ma czego dowodzić. Gdy $N \geq 2$, korzystając z (6.3), widzimy, że istnieje hiperpłaszczyzna $x_j = c$, taka że

$$A = B \cup C, \quad B = \{x \in A : x_j < c\}, \quad C = \{x \in A : x_j \geq c\},$$

a ponadto $A_1 \subset B$, $A_N \subset C$. Mamy więc

$$B = \bigcup_{k=1}^{N-1} B \cap A_k, \quad C = \bigcup_{k=2}^N C \cap A_k.$$

Zatem, jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla rozbić co najwyżej $N - 1$ -elementowych (założenie indukcyjne), to

$$|A| = |B| + |C| = \sum_{k=1}^N |B \cap A_k| + |C \cap A_k| = \sum_{k=1}^N |A_k|.$$

□

Dla dowolnego ograniczonego $F \subset \mathbf{R}^n$ definiujemy

$$v^*(F) = \inf \left\{ \sum_k |A_k| : F \subset \bigcup_k A_k \right\}.$$

Wielkość tę nazywamy *zewnątrzną miarą Jordana* zbioru F . Mówiąc przystępnie, miara zewnętrzna zbioru $F \subset A$ jest kresem dolnym objętości opisanych na zbiorze F skończonych rodzin przedziałów. Zauważmy, że z własności przedziałów wynika, że w definicji miary zewnętrznej można rozpatrywać tylko pokrycia przedziałami parami rozłącznymi.

6.5. Dla każdego ograniczonego $F \subset \mathbf{R}^n$

$$v^*(\bar{F}) = v^*(F).$$

6.6 (Zadanie). Pokaż, że dla każdego przedziału $B \subset \mathbf{R}^n$

$$v^*(w(B)) = v^*(B) = v^*(\bar{B}) = |B|.$$

Dla dowolnego $F \subset \mathbf{R}^n$ definiujemy

$$v_*(F) = \sup \left\{ \sum_k |A_k| : \bigcup_k \bullet A_k \subset F \right\}.$$

(Kropka wewnątrz znaku sumy oznacza, że składniki są parami rozłączne.) Wielkość tę nazywamy *wewnętrzną miarą Jordana* zbioru F . Mówiąc przystępnie, miara wewnętrzna zbioru $F \subset A$ jest kresem górnym objętości wpisanych w F skończonych rodzin przedziałów parami rozłącznych.

6.7. Dla każdego ograniczonego $F \subset \mathbf{R}^n$

$$v_*(w(F)) = v_*(F).$$

6.8 (Zadanie). Pokaż, że dla każdego przedziału $B \subset \mathbf{R}^n$

$$v_*(w(B)) = v_*(B) = v_*(\bar{B}) = |B|.$$

6.9 (Zadanie). Pokaż, że jeśli odcinek $[a, b] \subset \mathbf{R}^n$ ma punkt wspólny ze zbiorem F i z jego dopełnieniem, to ma także punkt wspólny z brzegiem F .

6.10. Miara wewnętrzna ograniczonego zbioru $F \subset \mathbf{R}^n$ jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy $w(F) = \emptyset$.

6.11. Twierdzenie. Dla każdego ograniczonego $F \subset \mathbf{R}^n$

$$v^*(F) = v_*(F) \iff v^*(\partial F) = 0.$$

Dowód. Niech $v^*(\partial F) = 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$bF \subset \bigcup_k A_k, \quad \sum_k |A_k| < \varepsilon,$$

gdzie A_k są parami rozłączne. Uzupełnijmy $\{A_k\}$ do pokrycia $\{A_k\} \cup \{B_j\}$ zbioru F i zauważmy, że dla każdego ze zbiorów B_j jest zawarty w F lub z nim rozłączny. Dlatego

$$v^*(F) - v_*(F) \leq \sum_k |A_k| < \varepsilon.$$

Z drugiej strony przypuśćmy, że $v_*(F) = v^*(F)$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\{A_k\}$ i $\{B_j\}$ będą rodzinami rozłącznych przedziałów, takimi, że

$$\bigcup_k A_k \subset w(F) \subset \bar{F} \subset \bigcup_j B_j, \quad \sum_j |B_j| - \sum_k |A_k| < \varepsilon.$$

Wtedy

$$\partial F \subset \bigcup_{k,j} B_j \setminus A_k = \bigcup_s C_s,$$

gdzie $\sum_s |C_s| < \varepsilon$. □

Ograniczony zbiór F nazwiemy *mierzalnym w sensie Jordana*, jeśli $v_*(F) = v^*(F)$. Jeśli $F \subset \mathbf{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym, to liczbę

$$v(F) = v_*(F) = v^*(F)$$

będziemy nazywać *miarą Jordana* zbioru F .

6.12. Ograniczony podzbiór $F \subset \mathbf{R}^n$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego brzeg jest miary zero.

6.13. Jeśli zbiory F i G są mierzalne, to także zbiory $F \cup G$, $F \cap G$ oraz $F \setminus G$ są mierzalne.

6.14. Jeśli zbiory $\{F_j\}_{1 \leq j \leq N}$ są mierzalne i parami rozłączne, to

$$v\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) = \sum_{j=1}^M v(F_j).$$

Warto jeszcze odnotować następujące własności miary Jordana:

6.15. Miara Jordana jest niezmiennicza na translacje w $\mathbf{R}^n$ i permutacje zmiennych. Jeśli $J_t x = tx$ jest jednokładnością, to $v(J_t(F)) = t^n v(F)$.

2. Całka Riemanna. Niech będzie dana ograniczona funkcja f na mierzalnym zbiorze F . Niech $\pi = \{F_k\}$ będzie rozbiem F na zbiory mierzalne. Dla każdego k niech

$$M_k = \sup_{F_k} f, \quad m_k = \inf_{F_k} f.$$

Wówczas sumy

$$L(f, \pi) = \sum_k m_k v(F_k), \quad U(f, \pi) = \sum_k M_k v(F_k)$$

nazywamy odpowiednio dolną i górną sumą całkową odpowiadającą rozbięciu π . Niech

$$\Omega(f, \pi) = U(f, \pi) - L(f, \pi) = \sum_k \sup_{x, y \in F_k} (f(x) - f(y)) v(F_k).$$

6.16. Dla każdych dwóch rozbić π_1 i π_2 zbioru F

$$L(f, \pi_1) \leq U(f, \pi_2).$$

Definiujemy dolną i górną całkę Darboux:

$$\int_{\star} f = \sup\{L(\pi, f) : \pi \in \mathcal{P}_F\}, \quad \int^{\star} f = \inf\{U(\pi, f) : \pi \in \mathcal{P}_F\}$$

i mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, co oznaczamy przez $f \in \mathcal{R}(F)$, jeśli

$$\int_{\star} f = \int^{\star} f.$$

Dla $f \in \mathcal{R}(F)$ wspólną wartość całek Darboux nazywamy całką Riemanna i oznaczamy przez

$$\int_F f = \int_{\star} f = \int^{\star} f.$$

6.17. *Obie całki Darboux i całka Riemanna są niezmiennicze na translacje.*

6.18. *Funkcja ograniczona f na zbiorze F jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje rozbitcie $\pi \in \mathcal{P}_F$, takie, że $\Omega(f, \pi) < \varepsilon$.*

6.19. *Jeśli $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła i ograniczona, to jest całkowalna.*

6.20. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(F)$, to $f + \alpha g \in \mathcal{R}(F)$, $fg \in \mathcal{R}(F)$, $|f| \in \mathcal{R}(F)$ oraz*

$$\int f + \alpha g = \int f + \alpha \int g, \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

6.21. Lemat. *Niech A będzie przedziałem. Zbiór $F \subset \bar{F} \subset A$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy χ_F jest całkowalna. Wtedy też*

$$v(F) = \int_A \chi_F.$$

6.22. *Niech $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ będzie całkowalna. Wtedy wykres f*

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : y = f(x)\}$$

jest zbiorem miary Jordana zero.

Zagadnienie realizacji całki funkcji całkowalnej przez sumy całkowe podziałów o średnicy dążącej do zera trochę się komplikuje w porównaniu z teorią w jednym wymiarze.

6.23. Lemat. *Jeśli F jest dowolnym zbiorem i*

$$F^{\delta} = \{x \in \mathbf{R}^n : \text{dist}(x, F) < \delta\}, \quad 0 < \delta < 1,$$

to

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} v^*(F^{\delta}) = 0.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech

$$F \subset \bigcup_k A_k, \quad \sum_k |A_k| < v^*(F) + \varepsilon,$$

gdzie A_k są parami rozłączne. Jeśli A_k ma krawędzie l_k , to A_k^{δ} zawiera się w prostopadłościanie A' o krawędziach $l_k + 2\delta$. Dlatego

$$v^*(F^{\delta}) \leq \sum_k |A'_k|,$$

gdzie

$$|A'_k| = (l_1 + 2\delta) \dots (l_n + 2\delta) = |A_k| \left(1 + \frac{2\delta}{l_k}\right) \dots \left(1 + \frac{2\delta}{l_n}\right),$$

co pociąga

$$v^*(F) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} v^*(F^\delta) \leq v^*(F) + \varepsilon,$$

a wobec dowolności $\varepsilon > 0$ – naszą tezę. $\square$

6.24. Lemat. Niech będzie dany podział π_0 zbioru mierzalnego F . Niech

$$\partial\pi = \bigcup_{Q \in \pi_0} \partial Q.$$

Jeśli π jest podziałem o średnicy $\delta > 0$, to dla każdego $P \in \pi$ mamy $P \subset (\partial\pi)^{2\delta}$ lub istnieje $Q \in \pi$, taki że $P \subset Q$.

Dowód. Jeśli $P \in \pi$ i P nie zawiera się w żadnym ze zbiorów $Q \in \pi_0$, to istnieją punkty $x, y \in P$ oraz $Q \in \pi_0$, takie że $x \in Q$, $y \notin Q$. Odcinek $[x, y]$ musi przecinać brzeg ∂Q , a ponieważ $\|x - y\| < \delta$, to także $\text{dist}(x, \partial Q) < \delta$. Ostatecznie więc $P \subset (\partial\pi_0)^{2\delta}$. $\square$

6.25. Uwaga. Dla każdego podziału π zbiór $\partial\pi$ jest miary zero.

Pomysł uproszczenia dowodu poniższego twierdzenia podsunęli mi pp. Łukasz Chrzanowski i Marcin Kaczmarek.

6.26. Twierdzenie. Niech $A \subset \mathbf{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym. Jeśli $f \in \mathcal{R}(A)$, to

$$\int_A f = \lim_{\delta(\pi) \rightarrow 0} L(f, \pi) = \lim_{\delta(\pi) \rightarrow 0} U(f, \pi).$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia

$$\omega(f, P) = \sup_{x, y \in P} |f(x) - f(y)|, \quad M = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Niech $\varepsilon > 0$ i niech π_0 będzie podziałem, takim że $\Omega(f, \pi_0) < \varepsilon$. Jeśli π jest dowolnym podziałem A o średnicy $\delta = \delta(\pi)$ i $P \in \pi$, to na mocy Lematu 6.24 P zawiera się w $(\partial\pi_0)^{2\delta}$ lub w pewnym elemencie $Q \in \pi_0$. Dlatego

$$\begin{aligned} \Omega(f, \pi) &= \sum_{P \in \pi} \omega(f, P) v(P) \\ &\leq \sum_{\pi \ni P \subset (\partial\pi_0)^{2\delta}} \omega(f, P) v(P) + \sum_{Q \in \pi_0} \omega(f, Q) v(Q) \\ &\leq 2M v^*((\partial\pi_0)^{2\delta}) + \varepsilon \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

gdy δ jest dostatecznie mała, co wynika z Lematu 6.23. Zatem

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq 2\varepsilon,$$

o ile $\delta(\pi)$ jest dostatecznie mała. $\square$

6.27. Jeśli funkcja ograniczona f na prostopadłościanie A jest całkowalna, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje rozbicie $\pi \in \mathcal{P}_A$ na prostopadłościany, takie że $\Omega(f, \pi) < \varepsilon$.

I jeszcze twierdzenie o wartości średniej.

6.28. Jeśli f jest funkcją ciągłą na mierzalnym zbiorze wypukłym F miary dodatniej, to istnieje punkt $c \in F$, taki że

$$f(c) = \frac{1}{v(F)} \int_F f(x) dx.$$

Dowód. Niech M będzie kresem górnym, a m kresem dolnym wartości funkcji na F . Wtedy

$$m \leq \frac{1}{v(F)} \int_F f(x) dx \leq M.$$

Jeśli jedna z nierówności nie jest ostra, to f jest funkcją stałą i sprawa jest oczywista. W przeciwnym wypadku istnieją punkty $a, b \in F$, takie że

$$f(a) < \frac{1}{v(F)} \int_F f(x) dx < f(b).$$

Rozważmy funkcję ciągłą jednej zmiennej $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$. Mamy $\varphi(0) = f(a)$ i $\varphi(1) = f(b)$, więc istnieje $t = t_0 \in (0, 1)$, takie że

$$f(a + t_0(b - a)) = \varphi(t_0) = \frac{1}{v(F)} \int_F f(x) dx.$$

Wystarczy teraz wziąć $c = a + t_0(b - a) \in F$. □

Na zakończenie paragrafu lemat, w którym słychać echo zagadnienia różniczkowania całki nieoznaczonej.

6.29. Lemat. Niech f będzie całkowalna na otwartym podzbiorze $U \subset \mathbf{R}^n$. Wtedy dla każdego punktu ciągłości $a \in U$ funkcji f

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{v(K(a, r))} \int_{K(a, r)} f(x) dx = f(a).$$

Dowód. Faktycznie, jeśli f jest ciągła w a , to

$$\left| f(a) - \frac{1}{v(K(a, r))} \int_{K(a, r)} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{v(K(a, r))} \int_{K(a, r)} |f(a) - f(x)| dx \leq \varepsilon,$$

jeśli tylko $r > 0$ jest tak małe, by $|f(a) - f(x)| \leq \varepsilon$ dla $|x - a| \leq r$. □

3. Twierdzenie Fubiniego. Twierdzenie to gra doniosłą rolę, bo sprowadza obliczanie całek wielomiarowych do całek jednokrotnych. Ma także wiele innych ciekawych zastosowań.

6.30. Twierdzenie (Fubini). Niech $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^m$ będą przedziałami. Niech f będzie całkowalna na $A \times B$. Wtedy funkcje

$$f^\#(x) = \int_B^* f(x, y) dy, \quad f^*(y) = \int_A^* f(x, y) dx$$

są całkowalne na A i

$$\int_B f^*(y) dy = \int_A f^\#(x) dx = \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y).$$

Dowód. Dla danego ε niech $\pi_1 \in \mathcal{P}(A)$, $\pi_2 \in \mathcal{P}(B)$ będą takimi rozbiciami, że

$$U(f, \pi_1 \times \pi_2) - L(f, \pi_1 \times \pi_2) < \varepsilon.$$

Wtedy

$$L(f, \pi_1 \times \pi_2) \leq L(f^\#, \pi_1) \leq U(f^\#, \pi_1) \leq U(f, \pi_1 \times \pi_2),$$

skąd wynika nasza teza dla $f^\#$. W przypadku funkcji $f^\star$ rozumiemy analogicznie. $\square$

Tezę twierdzenia Fubiniego będziemy najczęściej zapisywać w postaci

$$\int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_B^\star f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A^\star f(x, y) dx \right) dy.$$

Zamiast $d(x, y)$ będziemy też pisać $dxdy$.

6.31. Wniosek. *Jeśli f jest ciągła na A , gdzie przedział A jest postaci (6.1), to*

$$\int_A f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n.$$

6.32. Przykład. Mamy

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1]^2} ye^{xy} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy} dx \right) dy = \int_0^1 e^{xy} \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (e^y - 1) dy = e - 2. \end{aligned}$$

6.33. Przykład. Obliczmy całkę

$$\iint_{\substack{\pi \leq y \leq 2\pi \\ y - \pi \leq x \leq \pi}} \frac{\sin x}{x} dxdy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \int_\pi^{\pi+x} dy dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

6.34. Wniosek (zasada Cavallieri). *Jeśli zbiór $F \subset A \times B \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ jest mierzalny, to*

$$v_{n+m}(F) = \int_A v_m^\star(F_x) dx,$$

gdzie $F_x = \{y \in B : (x, y) \in F\}$.

Przykład. Wyprowadzimy rekurencyjny wzór na objętość kuli. Niech $D = K(0, R) \subset \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Oznaczmy zmienną w $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ przez (x, t) . Wtedy dla $t \in \mathbf{R}$

$$D_t = K(0, \sqrt{R^2 - t^2}),$$

więc oznaczając miarę kuli n -wymiarowej o promieniu r przez $\Omega_n(r)$ otrzymujemy

$$\Omega_{n+1}(R) = \int_{-R}^R \Omega_n(\sqrt{R^2 - t^2}) dt.$$

Nietrudno jednak zauważyć, że

$$\Omega_n(r) = r^n \Omega_n(1) = r^n \Omega_n,$$

więc

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{n/2} dt.$$

Przez podstawienie trygonometryczne

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx = 2I_{n+1},$$

więc podstawiając znane wartości

$$I_{2k} = \frac{\pi}{2w_k}, \quad I_{2k+1} = \frac{w_k}{2k+1},$$

gdzie

$$w_k = 4^k \binom{2k}{k}^{-1}, \quad \frac{w_k}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{\pi},$$

jest ciągiem Wallisa, otrzymujemy

$$\frac{\Omega_{2k+2}}{\Omega_{2k}} = \frac{\pi}{k+1}, \quad \frac{\Omega_{2k+1}}{\Omega_{2k-1}} = \frac{\pi}{k+1/2}.$$

W szczególności

$$\Omega_1 = 2, \quad \Omega_2 = \pi, \quad \Omega_3 = \frac{4}{3}\pi, \quad \Omega_4 = \frac{1}{2}\pi^2, \quad \Omega_5 = \frac{8\pi^2}{15}$$

i ogólnie

$$\Omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \Omega_{2k+1} = \frac{\pi^k}{1/2 \cdot 3/2 \cdot \dots \cdot (k+1/2)}.$$

Sprawdzenie tych wzorów pozostawiamy Czytelnikowi.

6.35. Zadanie. Pokaż, że

$$\Omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Przykład. Obliczmy jeszcze objętość bryły obrotowej. Niech będzie dana płaska figura

$$A = \{(x, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq f(x)\}$$

pod wykresem funkcji ciągłej $f : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$. Niech F będzie bryłą otrzymaną przez obrót figury A dookoła osi x . Mamy

$$F = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq f(x)^2, 0 \leq x \leq a\}.$$

Dlatego na mocy zasady Cavallieriego

$$v(F) = \pi \int_0^a f(x)^2 dx.$$

6.36. Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie wielomianem. Udowodnij, że dla każdego $r > 0$ zbiór

$$F(r) = \{x \in K(0, r) : f(x) = 0\}$$

jest miary zero.

Przykład. A oto przykład pokazujący, że całki jednokrotne mogą istnieć, a mimo to teza twierdzenia Fubiniego nie sprawdza się, i wobec tego definicja całki wielokrotnej nie ma sensu. Niech

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Jak widać, funkcja jest określona i ciągła w kwadracie $[0, 1]^2$ poza zbiorem jednopunktowym $Z = \{(0, 0)\}$. Dla każdych $x, y \in (0, 1]$ mamy

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{1}{1 + y^2}$$

i wobec tego

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = -\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Przyczyną, dla której twierdzenie Fubiniego zawodzi w tym przypadku jest to, że funkcja f jest nieograniczona na swojej dziedzinie, a więc nie należy do $\mathcal{R}([0, 1]^2)$. Jest to dla nas przestroga - nie wystarczy, że całki iterowane istnieją, aby można było z sensem posługiwać się całką wielokrotną.

Twierdzenie Fubiniego pomaga także w różniczkowaniu całek z parametrem. Przypomnijmy najpierw, że jeśli $g \in C([a, b] \times [c, d])$, to funkcja

$$G(x) = \int_c^d g(x, y) dy$$

jest ciągła na $[a, b]$.

6.37. Wniosek. Niech f i $\partial_x f$ będą funkcjami ciągłymi na $[a, b] \times [c, d]$. Wtedy funkcja

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

jest różniczkowalna na (a, b) i

$$F'(x) = \int_c^d \partial_x f(x, y) dy.$$

Innymi słowy,

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \partial_x f(x, y) dy.$$

Dowód. Mamy

$$f(x, y) = \int_a^x \partial_t f(t, y) dt + f(a, y),$$

więc na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \int_a^x \partial_t f(t, y) dt dy + \int_c^d f(a, y) dy \\ &= \int_a^x \left(\int_c^d \partial_t f(t, y) dy \right) dt + \int_c^d f(a, y) dy, \end{aligned}$$

co pokazuje, że F jest różniczkowalna i

$$F'(x) = \int_c^d \partial_t f(t, y) dy.$$

□

6.38. Niech $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$, $\varphi, \psi \in C^1(\mathbf{R})$. Niech

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Pokaż, że

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_x f(x, y) dy + \psi'(x)f(x, \psi(x)) - \varphi'(x)f(x, \varphi(x)).$$

4. Zamiana zmiennej w całce Riemanna. Jak zmienia się miara zbioru i całka funkcji pod wpływem przekształceń przestrzeni $\mathbf{R}^n$? Aby zbadać tę kwestię, zaczynamy od przekształceń liniowych.

6.39. Lemat. Jeśli $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest przekształceniem liniowym, a F zbiorem mierzalnym, to obraz $T(F)$ jest mierzalny i

$$(\#) \quad v(T(F)) = |\det T| v(F)$$

Dowód. Jeśli T jest osobliwe, to $v^*(T(F)) = 0$, więc $T(F)$ jest mierzalny i

$$v(T(F)) = 0 = |\det T| v(F).$$

Jeśli T jest nieosobliwe, musimy najpierw zająć się prostopadłościanami. Zauważmy, że brzeg prostopadłościanu P jest sumą skończonej liczby zbiorów leżących w hiperpłaszczyznach, więc $T(\partial P) = \partial T(P)$ jest zbiorem miary zero, więc $T(P)$ jest też mierzalny.

Aby otrzymać wzór (#) dla prostopadłościanów, przedstawiamy T w postaci iloczynu przekształceń elementarnych typu

$$I_\sigma x = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad T_{kt} x = (x_1, x_2, \dots, tx_k, \dots, x_n)$$

oraz

$$M_{ij}^\pm x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j \pm x_i, \dots, x_n).$$

W pierwszych dwóch przypadkach sprawa jest jasna. Trzeci wystarczy sprawdzić w dwóch wymiarach. Niech $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$. Niech $A(x, y) = (x + y, y)$. Zgodnie z zasadą Cavalieriego

$$\begin{aligned} v(AP) &= \int_c^d v^*((AP)_y) dy = \int_c^d v^*([a + y, b + y]) dy \\ (6.40) \quad &= (b - a) \int_c^d dy = v(P). \end{aligned}$$

Zatem teza lematu zachodzi dla prostopadłościanów.

Niech T będzie nieosobliwe, a F – zbiorem mierzalnym i niech

$$\bigcup_j P_j \subset F \subset \bigcup_k R_k,$$

gdzie P_j są parami rozłącznymi prostopadłościanami, a R_k – prostopadłościanami, takimi że dla danego z góry $\varepsilon > 0$

$$\sum_k |R_k| - \varepsilon \leq v(F) \leq \sum_j |P_j| + \varepsilon.$$

Wtedy

$$\bigcup_j T(P_j) \subset T(F) \subset \bigcup_k T(R_k)$$

oraz

$$\begin{aligned} |\det T|(v(F) - \varepsilon) &\leq |\det T| \sum_j |P_j| \leq v_*(F) \leq v^*(F) \\ &\leq |\det T| \sum_k |R_k| \leq |\det T|(v(F) + \varepsilon), \end{aligned}$$

co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ kończy dowód. $\square$

6.41. Jeśli φ jest izometrią $\mathbf{R}^n$, to

$$v(\varphi(F)) = \varphi(F)$$

dla każdego mierzalnego F .

Pamiętamy wzór na zamianę zmiennej w całce jednowymiarowej. Jeśli f jest funkcją całkowalną, a u jest klasy C^1 , to

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y) dy = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx.$$

Wzór ten można przepisać w postaci

$$\int_{u((a,b))} f(y) dy = \int_{(a,b)} f(u(x)) |u'(x)| dx.$$

Ta druga wersja wzoru ma swój wielowymiarowy odpowiednik.

6.42. Twierdzenie (o zamianie zmiennej). Niech $U \subset \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, a $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 . Niech $F \subset \overline{F} \subset U$ i $\varphi(F)$ będą zbiorami mierzalnym w sensie Jordana. Jeśli f jest całkowalna na $\varphi(F)$, to $f \circ \varphi$ jest całkowalna na F , a ponadto

$$\int_{\varphi(F)} f(y) dy = \int_F (f \circ \varphi)(x) |\det \varphi'(x)| dx.$$

W szczególności

$$(6.43) \quad v(\varphi(F)) = \int_F |\det \varphi'(x)| dx.$$

Dowód. (1). Istota sprawy polega na tym, by udowodnić twierdzenie dla zbioru F będącego kostką. Niech więc aż do odwołania F będzie kostką. Zaczniemy od kluczowego lematu.

6.44. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że jeśli $Q \subset F$ jest kostką o środku a i krawędzi l , a $T = \varphi'(a)$, to

$$(1 - \varepsilon) v(T(Q)) \leq v^*(\varphi(Q)) \leq (1 + \varepsilon) v(T(Q))$$

o ile $l < \delta$.

(a). Nietrudno sprowadzić zagadnienie do przypadku, gdy $a = 0 \in F$ i $\varphi(0) = 0$. Niech Q_0 będzie kostką o środku 0 i krawędzi 1. Niech $\overline{TQ_0} \subset G$, gdzie G jest otwarty i mierzalny oraz

$$v(G) \leq (1 + \varepsilon)v(TQ_0)$$

a stąd

$$v(tG) \leq (1 + \varepsilon)v(T(tQ_0)), \quad t > 0.$$

Wtedy $\text{dist}(G^c, TQ) = \rho > 0$, więc $\text{dist}(tG^c, T(tQ)) = \rho t$. Niech $\delta > 0$ będzie tak małe, aby

$$(*) \quad \|\varphi(th) - T(th)\| \leq \sup_{c \in [0, th]} \|\varphi'(c) - \varphi'(0)\| \leq \rho \|th\| < \rho t, \quad h \in Q_0, t < \delta.$$

Stąd każdy punkt $\varphi(tQ)$ jest oddalony od $T(tQ)$ o mniej niż ρt , więc $\varphi(tQ) \subset tG$. Zatem dla $t < \delta$

$$v^*(\varphi(tQ)) \leq (1 + \varepsilon)v(tU) \leq (1 + \varepsilon)v(TQ)$$

co dowodzi nierówności $v^*(\varphi(tQ_0)) \leq (1 + \varepsilon)v(T(tQ_0))$. Pamiętając o redukcji do $a = 0$, widzimy że nasza kostka jest postaci $Q = lQ_0$, więc

$$v(\varphi(Q)) \leq (1 + \varepsilon)v(TQ),$$

o ile $l < \delta$. Zauważmy, że δ nie zależy od położenia kostki, a tylko od wielkości jej krawędzi, co wynika z jednostajnej ciągłości pochodnej na $\bar{F}$.

(b). Dowód lewej nierówności jest podobny, ale nieco delikatniejszy. Ciągłe zakładamy, że $a = 0$ i $\varphi(0) = 0$. Niech $0 \in K \subset w(TQ_0)$ będzie wypukłym zbiorem zwartym (a więc mierzalnym), takim że

$$v(TQ_0) \leq (1 + \varepsilon)v(K)$$

a stąd

$$v(T(tQ_0)) \leq (1 + \varepsilon)v(tK), \quad t > 0.$$

Wtedy też $\text{dist}(K, (TQ_0)^c) = \rho > 0$, więc $\text{dist}(tK, (T(tQ_0))^c) = \rho t$. Niech $\delta > 0$ będzie tak małe, jak w (*). Każdy punkt $\partial\varphi(tQ_0) = \varphi(t\partial Q_0)$ jest oddalony od $\partial T(tQ_0) = T(t\partial Q_0)$ o mniej niż ρt , więc nie może przecinać tK . Ale tK jest wypukły i ma punkt wspólny z $\varphi(tQ_0)$, więc $tK \subset \varphi(tQ_0)$. Zatem dla $0 < t < \delta$

$$v(T(tQ_0)) \leq (1 + \varepsilon)v(tK) \leq (1 + \varepsilon)v(\varphi(tQ_0)),$$

co po podstawieniu $Q = tQ_0$ dowodzi drugiej potrzebnej nierówności i kończy dowód (6.44).

(2). Z (6.44) wynika, że jeśli $M \subset \bar{M} \subset U$ ma miarę zero, to także $v^*(\varphi(M)) = 0$. A jako że $\varphi(\partial K) = \partial(\varphi(K))$, obrazem zbioru mierzalnego zawartego w U wraz z domknięciem jest zbiór mierzalny. To spostrzeżenie pozwala we wzorze (6.44) użyć miary v zamiast miary zewnętrznej v^* .

(3). Przystępujemy do zakończenia dowodu. Niech $\varepsilon > 0$. Niech π będzie rozbiem kostki F na kostki Q_k o środkach x_k i jednakowej średnicy. Wtedy $\pi' = \{P_k\}$, gdzie $P_k = \varphi(Q_k)$, jest rozbiem $\varphi(F)$ i $\delta(\pi') \leq C\delta(\pi)$. Jeśli $\delta(\pi) < \varepsilon$ jest tak mała, jak wymaga tego (6.44), to

$$(1 - \varepsilon)v(P_k) \leq |\det \varphi'(x_k)|v(Q_k) \leq (1 + \varepsilon)v(P_k).$$

Porównajmy teraz sumy riemannowskie dla obu całek. Jeśli $\delta(\pi) < \varepsilon$ jest tak mała, jak wymaga tego (6.44), to

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k f \circ \varphi(x_k) |\det \varphi'(x_k)| v(Q_k) - \sum_k f(\varphi(x_k)) v(P_k) \right| \\ & \leq \|f\|_\infty \sum_k \left| |\det \varphi'(x_k)| v(Q_k) - v(P_k) \right| \\ & \leq \varepsilon \|f\|_\infty \sum_k v(P_k) = \varepsilon \|f\|_\infty v(\varphi(U)), \end{aligned}$$

o ile średnice podziałów są dostatecznie małe, co pokazuje, że funkcja

$$(*) \quad x \mapsto f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)|$$

jest całkowalna na K i

$$\int_{\varphi(K)} f(y) dy = \int_K f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx.$$

Zauważmy jeszcze, że skoro $|\det \varphi'(x)| > 0$ na U , a F jest zbiorem zwartym, to istnieje stała $c > 0$, taka że $|\det \varphi'(x)| \geq c$ dla $x \in F$. Zatem również funkcja $f \circ \varphi$ jest całkowalna.

(4). Do tej pory zakładaliśmy, że F jest kostką. Pora odrzucić to ograniczenie. Jeśli F nie jest kostką, to przynajmniej daje się rozbić na „prawie-kostki”. Możemy mianowicie znaleźć rodzinę parami rozłącznych kostek $R_j \subset \overline{R}_j \subset U$, takich że

$$F \subset F_1 = \bigcup_j R_j \subset U,$$

a następnie przedłużyć f na F_1 . Niech f_1 będzie funkcją równą f na $\varphi(F)$ i 0 na $\varphi(F_1) \setminus \varphi(F)$. Wtedy

$$\int_{\varphi(F)} f(y) dy = \int_{\varphi(F_1)} f_1(y) dy = \sum_j \int_{\varphi(R_j)} f_1(y) dy,$$

gdzie na mocy wcześniejszych rozważań

$$\int_{\varphi(R_j)} f_1(y) dy = \int_{R_j} f_1(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(F)} f(y) dy &= \sum_j \int_{R_j} f_1(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx \\ &= \int_{F_1} f_1(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx = \int_F f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx, \end{aligned}$$

co było naszym celem. □

Przykład. Niech

$$\varphi(x, y) = (x^2, \frac{y^2}{x}), \quad (x, y) \in U = (0, \infty)^2.$$

Wtedy $|\varphi'(x, y)| = 4y$. Niech $a, b > 0$ i niech $D_h = [a, a+h] \times [b, b+h]$ dla $h > 0$.

Znajdźmy miarę $\varphi(D_h)$. Jeśli

$$(\xi, \eta) = (x^2, \frac{y^2}{x}) \in F = \varphi(D_h),$$

to

$$a^2 \leq \xi \leq (a+h)^2$$

i przy ustalonym ξ

$$\frac{b^2}{\sqrt{\xi}} \leq \eta \leq \frac{(b+h)^2}{\sqrt{\xi}}, \quad v(F_\xi) = \frac{(b+h)^2 - b^2}{\sqrt{\xi}}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} v(F) &= ((b+h)^2 - b^2) \int_{a^2}^{(a+h)^2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \\ &= 4((b+h)^2 - b^2) \Big|_{a^2}^{(a+h)^2} = 4((b+h)^2 - b^2)h. \end{aligned}$$

Stąd zaś

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(\varphi(D_h))}{v(D_h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4((b+h)^2 - b^2)}{h} = 4b = |\varphi'(a, b)|.$$

Przykład. A oto inny przykład obliczania objętości bryły obrotowej. Niech jak wyżej

$$A = \{(x, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq f(x)\}$$

będzie zbiorem punktów leżących pod wykresem funkcji ciągłej $f : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$. Niech F będzie bryłą powstałą przez obrót A wokół osi z . Punkt (x, y, z) należy do F , gdy jego współrzędne spełniają nierówności

$$x^2 + y^2 \leq \sqrt{a}, \quad 0 \leq z \leq f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Dokonując podstawienia

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = \zeta,$$

otrzymujemy

$$v(F) = 2\pi \int_0^a r f(r) dr.$$

Zmieniając nieco dowód można wyprowadzić inną wersję twierdzenia o zamianie zmiennej.

6.45. Twierdzenie. Niech U będzie otwartym zbiorem mierzalnym w sensie Jordana. Niech $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ będzie różnowartościowym odwzorowaniem klasy C^1 na mierzalny zbiór $\varphi(U)$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}(\varphi(U))$ funkcja

$$x \rightarrow f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)|$$

jest całkowalna na U oraz

$$\int_{\varphi(U)} f(y) dy = \int_U (f \circ \varphi)(x) |\det \varphi'(x)| dx.$$

Przykład. Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie zadane wzorem

$$\varphi(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \sin \beta \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Bez trudu widzimy, że φ jest klasy C^1 , a jego pochodna ma macierz

$$\varphi'(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta & r \cos \alpha \sin \beta & -r \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & r \cos \alpha \sin \beta & r \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

skąd znajdujemy jacobian

$$J_\varphi(r, \alpha, \beta) = r^2 \sin \alpha.$$

Jak widać, jacobian zależy od dwóch tylko zmiennych. Jeśli

$$U = (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi),$$

to nietrudno zauważyć, że $\varphi(U) = V = K(0, R) \setminus F$, gdzie $v(F) = 0$. Oczywiście zarówno U , jak i V są otwarte i mieralne, a $\varphi : U \rightarrow V$ dyfeomorfizmem klasy C^1 . Na mocy Twierdzenia 6.45 dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}(U)$

$$\begin{aligned} \int_{K(0, R)} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_U f(r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \sin \beta, r \cos \alpha) r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\beta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \sin \beta, r \cos \alpha) r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

W szczególności podstawiając $f = 1$ otrzymujemy raz jeszcze

$$\Omega_3(R) = \mu(K(0, R)) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\beta = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

6.46. Przykład. Niech $n \geq 2$. Niech $U = \mathbf{R}^n$ i niech

$$\Phi(r, t_2, \dots, t_n) = r \begin{pmatrix} \cos t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n \\ \sin t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n \\ \sin t_3 \cos t_4 \dots \cos t_n \\ \dots \\ \sin t_{n-1} \cos t_n \\ \sin t_n \end{pmatrix}.$$

Odwzorowanie Φ jest klasy C^1 i

$$\det \Phi'(r, t) = r^{n-1} \cos^{n-2} t_n \cos^{n-3} t_{n-1} \dots \cos t_3,$$

co przeliczymy za chwilę. Jeśli

$$V = (0, 1) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2},$$

to Φ jest dyfeomorfizmem na V i $\Phi(\bar{V}) = \bar{K}(0, 1)$. W takim razie dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}(K(0, 1))$

$$\int_{K(0, 1)} f(x) dx = \int_V f(\Phi(r, t)) r^{n-1} \cos^{n-2} t_n \cos^{n-3} t_{n-1} \dots \cos t_3 dt_2 dt_3 \dots dt_n dr.$$

Zauważmy, że zbiór $\Phi(V) \setminus K(0, 1)$ jest niepusty, ale

$$v(\Phi(V) \setminus K(0, 1)) = 0.$$

Zbiory po których całkujemy można zresztą zastąpić przez ich domknięcia, bo brzegi są miary zero.

6.47. Lemat. Przy oznaczeniach Przykładu 6.46

$$\det \Phi'(r, t) = r^{n-1} \cos^{n-2} t_n \cos^{n-3} t_{n-1} \dots \cos t_3.$$

Dowód. Niech $\Phi'(r, t) = r A_n$. Aby ułatwić zapis rozumowania indukcyjnego, niech

$$A_{n-1} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

będzie analogiczną macierzą w wymiarze o jeden niższym. Mamy

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{pmatrix} \cos t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n & -\sin t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n & \dots & -\cos t_2 \cos t_3 \dots \sin t_n \\ \sin t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n & \cos t_2 \cos t_3 \dots \cos t_n & \dots & -\sin t_2 \cos t_3 \dots \sin t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin t_n & 0 & \dots & \cos t_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cos t_n & a_{12} \cos t_n & \dots & -a_{11} \sin t_n \\ a_{21} \cos t_n & a_{22} \cos t_n & \dots & -a_{21} \sin t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin t_n & 0 & \dots & \cos t_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a więc

$$\det A_n = \cos^n t_n \det A_{n-1} + \sin^2 t_n \cos^{n-2} t_n \det A_{n-1} = \cos^{n-2} t_n \det A_{n-1},$$

skąd już łatwo otrzymujemy końcowy wzór. $\square$

6.48. Przykład. Niech A będzie macierzą dodatnio określoną. Po dokonaniu podstawienia $y = Ax$, otrzymujemy

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \frac{1}{\det A} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|y\|^2} dy = \frac{1}{\det A} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt \right)^n = \frac{\pi^{n/2}}{\det A}$$

6.49. Przykład. Obliczymy na nowo całkę Poissona

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-t^2} dt.$$

Mamy

$$\left(\int_{-N}^N e^{-t^2} dt \right)^2 = \int_{[-N, N]^2} e^{-\|x\|^2} dx,$$

gdzie

$$\int_{\|x\| \leq N/\sqrt{2}} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{[-N, N]^2} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{\|x\| \leq N} e^{-\|x\|^2} dx.$$

Po dokonaniu podstawienia biegunowego

$$\int_{\|x\| \leq N} e^{-\|x\|^2} dx = 2\pi \int_0^N r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-N^2}),$$

skąd już łatwo wynika

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

6.50. Przykład. Jak wiemy, objętość kuli n -wymiarowej wynosi

$$\Omega_n = |K(0, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} |K(0, 1)| &= \int_{\|x\| \leq 1} dx = \int_0^1 r^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt \\ &= \frac{2\pi}{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt, \end{aligned}$$

więc

$$\omega_{n-1} = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = n\Omega_n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx &= \omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{\omega_{n-1}}{2} \int_0^\infty s^{n/2-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{\omega_{n-1} \Gamma(n/2)}{2} = \Omega_n \Gamma(n/2 + 1) = \pi^{n/2}. \end{aligned}$$

W ten sposób obliczyliśmy jeszcze raz całkę Poissona w dowolnym wymiarze, nie korzystając z wyniku jednowymiarowego, który znacznie łatwiej daje ten sam wynik.

Niech $u_k \in \mathbf{R}^n$. Przypomnijmy, że równoległoscian to zbiór postaci

$$R = a + [u_1, u_2, \dots, u_n] = \{a + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k : 0 \leq \alpha_k \leq 1\}.$$

Jeśli U jest odwzorowaniem liniowym o macierzy $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, to

$$R = a + U([0, 1]^n),$$

więc

$$v(R) = |\det U| = |\det(u_1, u_2, \dots, u_n)|.$$

Sympleksem zbudowanym na wektorach u_k nazywamy zbiór postaci

$$S = a + \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \{a + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k : 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1\}.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] = \bigcup_{\sigma \in S(n)} \langle u_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_n} \rangle$$

albo, krócej, $R = \bigcup S_\sigma$, gdzie każdy z sympleksów ma tę samą miarę, a ich przekroje są miary zero. Dlatego

$$v(S) = \frac{1}{n!} |\det(u_1, u_2, \dots, u_n)|.$$

6.51. Zadanie. Sympleks $S = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym punkty

$$0, u_1, u_1 + u_2, \dots, u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Czasem wygodnie jest zapisać miarę równoległościanu za pomocą wyznacznika Grama

$$v(R) = (\det U^T U)^{1/2},$$

gdzie

$$U^T U = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

6.52. Zadanie. Niech $A = \{x \in \mathbf{R}_+^n : \sum_{j=1}^n x_j \leq 1\}$. Udowodnij, że

$$\int_A f\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f(u) u^{n-1} du,$$

a następnie oblicz miarę A .

6.53. Zadanie. Pokaż, że ograniczony zbiór wypukły jest mierzalny w sensie Jordana.