

Historyjki kombinatoryczne

Udowodnij następujące tożsamości przy pomocy historyjek¹:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
5. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$
6. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$
7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
8. $\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} 2 = \binom{n+1}{k+1}$
9. $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}$
10. $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2}$
11. $\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$
12. $\sum_{j=k}^n \binom{n}{k} \binom{j}{k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}$
13. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
14. $\sum_{k=0}^n k = \binom{n+1}{2}$
15. $\sum_{k=0}^n k^2 = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$
16. $\sum_{k=0}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$
17. $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$
18. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$
19. $\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 3^n$
20. $\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n! \prod_{i=1}^n (2i-1)$
21. $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n$
22. $\sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} k! = n^n$

¹znanych także jako: bajki kombinatoryczne, zliczanie na dwa sposoby, dowody bijekcyjne, dowodzenie tożsamości przez interpretację kombinatoryczną, dowody kombinatoryczne *et cetera*...