

Wielomiany

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego n naturalnego wielomian

$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych

Zadanie 2. Niech f będzie wielomianem, a n, k liczbami naturalnymi. Udowodnij, że jeśli $(x-1)^k$ dzieli $f(x^n)$, to również $(x^n-1)^k$ dzieli $f(x^n)$

Zadanie 3. Wielomian $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ spełnia warunki $P(1) = 0$ oraz $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$a_n + 2a_{n-1} + \dots + (n+1)a_0 = 0.$$

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ liczba $n^{2n} - n^{n+2} + n^n - 1$ jest podzielna przez $(n-1)^3$

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ stopnia co najwyżej piątego, takie że wielomian $P(x) + 1$ jest podzielny przez $(x-1)^3$, a wielomian $P(x) - 1$ jest podzielny przez $(x+1)^3$.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_r$ zachodzi nierówność

$$\sum_{m,n=1}^r \frac{a_m a_n}{m+n} \geq 0$$

i rozstrzygnij, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 7. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, a a, b takimi liczbami całkowitymi, że $f(a)f(b) = -(a-b)^2$, to $f(a) + f(b) = 0$.

Zadanie 8. Niech p, q będą liczbami wymiernymi. Udowodnij, że jeśli jeden z pierwiastków równania $x^3 + px + q = 0$ jest iloczynem dwóch pozostałych, to jest on liczbą wymierną.

Zadanie 9. Niech P będzie wielomianem stopnia co najwyżej n , który spełnia równość

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

dla $k = 0, \dots, n$. Wyznacz $P(n+1)$.

Zadanie 10. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$$

Zadanie 11. Wielomiany unormowane P oraz Q spełniają warunek

$$P(x)^2 = (x^2 - 1)Q(x)^2 + 1.$$

Udowodnij, że $P' = nQ$, gdzie n to stopień P .