Gra i trąbi zespół Kombi

Zadanie 1. Na tablicy narysowano 2014 kółek, 3000 krzyżyków i 5000 kwadratów. W jednym ruchu możemy wykonać jedną z następujących operacji:

- zmazać dwa kółka i narysować krzyżyk,
- zmazać dwa krzyżyki i narysować kwadrat,
- zmazać dwa kwadraty i narysować kółko.

Rozstrzygnij, czy można wykonać taki ciąg ruchów, aby na tablicy pozostały mniej niż trzy figury.

Zadanie 2. Przy okrągłym stole usiadło 15 osób, przy czym nikt nie usiadł na wyznaczonym mu miejscu. Pokaż, że można obrócić stół tak, żeby przynajmniej dwie osoby siedziały na właściwym miejscu.

Zadanie 3. W prostokącie o bokach długości 3 i 4 wybrano sześć różnych punktów. Udowodnij, że pewne dwa z nich są odległe od siebie o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 4. [1] Niech m, n będą liczbami naturalnymi, a x liczbą z przedziału $[0, 1]$. Pokaż, że

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1$$

Zadanie 5. Malujemy na malinowo liczbę 1, a następnie kontynuujemy malowańsko według zasady: jeśli liczba x jest malinowa, to malujemy na malinowo również $x + 1$ oraz $\frac{x}{x+1}$. Wyznacz zbiór wszystkich liczb pomalowanych na malinowo.

Zadanie 6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na burgundowo albo beżowo, przy czym użyto obu kolorów. Pokaż, że istnieją dwa różnokolorowe punkty odległe o dokładnie $666 + \frac{1}{\pi}$.

Zadanie 7. W grupie kn osób każdy ma więcej niż $(k - 1)\, n$ znajomych. Pokaż, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają. Czy teza pozostaje prawdziwa jeśli założymy tylko, że każdy ma nie mniej niż $(k - 1)\, n$ znajomych?

Zadanie 8. Siedemnaście osób wymienia pomiędzy sobą listy, przy czym każda osoba koresponduje z każdą z pozostałych. Przedmiotem korespondencji są trzy różne zagadnienia, a każda para osób omawia korespondencyjnie tylko jedno z tych zagadnień. Wykaż, że są takie trzy osoby, których wzajemna korespondencja dotyczy jednego i tego samego zagadnienia.

Zadanie 9. Pokaż, że skończoną liczbą kwadratów o sumie pól równej 4 można pokryć kwadrat o boku 1 (kwadraty w pokryciu mogą na siebie nachodzić). Wywnioskuj stąd, że jeśli dany jest nieskończony ciąg kwadratów o polach $a_1, a_2, \ldots$ oraz $\sum_{i>0} a_i = \infty$, to można tymi kwadratami pokryć całą płaszczyznę. Czy ostatni wniosek jest prawdziwy, jeśli zastąpimy kwadraty prostokątami?

[1] Kombi też kiedyś nagrało cover utworu Mezo, tj. to zadanie wbrew pozorom jest w tematyce listy.