Zdecydowanie za długa lista o wzorach Viète'a

Rozgrzewka

W każdym zadaniu w tej części zakładamy, że $a \neq 0$.

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ma pierwiastek potrójny, to $bc = 9ad$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli pierwiastki równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tworzą ciąg geometryczny, to $ac^3 = db^3$.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $b^2 \geq ac$ oraz $c^2 \geq bd$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeżeli dwa pierwiastki równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ są liczbami przeciwnymi, to $bc = ad$.

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli liczby a, b są różne od zera, to pierwiastki x_1, x_2, x_3 równania $ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$ spełniają warunek $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$.

Zadanie 6. Liczby x, y, z są pierwiastkami równania $t^3 - 3t + 1 = 0$. Oblicz $x^3 + y^3 + z^3$ oraz $x^4 + y^4 + z^4$.

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 - 6x^2 + bx + b$ spełniają równość $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$.

Zadanie 8. Wyznacz współczynniki p, q, r wielomianu $x^5 - 10x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 32$ wiedząc, że wszystkie jego pierwiastki są liczbami dodatnimi.

Zadanie 9. Niech p, q będą liczbami wymiernymi. Udowodnij, że jeśli jeden z pierwiastków równania $x^3+px+q = 0$ jest iloczynem dwóch pozostałych, to jest on liczbą wymierną.

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie wymierne wartości parametru a, dla których wszystkie pierwiastki wielomianu $ax^2 + (a + 1)\,x + a - 1$ są liczbami całlkowitymi.

Na Jaremu!

Zadanie 11. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$

Zadanie 12. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$\left(a^2 + b^2 - 1\right)(a + b) = \left(b^2 + c^2 - 1\right)(b + c) = \left(c^2 + d^2 - 1\right)(c + d).$$

Pokaż, że $a + b + c + d = 0$.

Zadanie 13. Udowodnij, że jeżeli $a+b+c=0$, to:

a) $a^3+b^3+c^3=3abc$,

b) $2\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$,

c) $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$.

Zadanie 14. Rozłóż na czynniki wielomian $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Zadanie 15. Liczby a,b,c,x,y,z spełniają warunki

a) $x+y+z=a+b+c$,

b) $xyz=abc$,

c) $0<a\leq x\leq y\leq z\leq c$,

d) $a\leq b\leq c$.

Pokazać, że $x=a,\ y=b,\ z=c$.

Zadanie 16. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb wymiernych dodatnich, dla których liczby $x+y+z$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ oraz xyz są naturalne.

Zadanie 17. Wykaż, że liczba $\left(7+\sqrt{48}\right)^{13}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{13}$ jest całkowita i podzielna przez 14.

Zadanie 18. Udowodnij, że jeżeli wielomian $x^6+ax^3+bx^2+cx+d$ ma wszystkie pierwiastki całkowite, to $a=b=c=d=0$.

Zadanie 19. Znajdź wszystkie wielomiany $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}x+a_n$ które spełniają warunki:

a) wszystkie współczynniki $a_1,\ldots,a_n$ należą do zbioru $\{-1,1\}$,

b) wszystkie pierwiastki tego wielomianu są rzeczywiste.

Zadanie 20. Udowodnij, że jeżeli a i b są różnymi pierwiastkami wielomianu x^4+x^3-1 to liczba ab jest pierwiastkiem wielomianu $x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

Zadanie 21. Dany jest wielomian $x^n+nx^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ o współczynnikach rzeczywistych, którego pierwiastki $x_1,\ldots,x_n$ są rzeczywiste. Wyznacz je, wiedząc że $x_1^{16}+\ldots+x_n^{16}=n$.