Nierówności między średnimi

Nierówność między średnimi. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n > 0$ zachodzi

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}},$$

przy czym równość (w którejkolwiek nierówności) zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_n$. Dwie pierwsze nierówności zachodzą też dla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, z takim samym warunkiem na równość

Rozgrzewka

Zadanie 1. Udowodnij nierówność między średnimi dla $n = 2$.

Zadanie 2. ($n = 3$) Udowodnij nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną.

W poniższym trzech zadaniach należy użyć nierówności między średnimi (nawet jak można zrobić to elementarniej).

Zadanie 3. Pokaż, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Zadanie 4. (Pierwsze zadanie na pierwszym etapie[1] pierwszej OM) Pokaż, że dla każdego $m > 0$ zachodzi $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$.

Zadanie 5. Pokaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Sparing

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $n^n > (n+1)^{n-1}$.

Zadanie 7. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in [0, 2]$ zachodzi $3abc \leq 4(a + b + c)$.

Zadanie 8. Liczby $x, y, z > 0$ spełniają nierówność $xyz \geq xy + yz + zx$. Pokaż, że $xyz \geq 3(x + y + z)$.

Zadanie 9. Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 \geq 0$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 10. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = 1$. Pokaż, że

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Zadanie 11. (Nierówność Nesbitta) Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

[1] Wtedy były 4 etapy, korespondencyjny nie miał numeru, więc pierwszy etap I OM oznacza pierwszy etap rozgrywany „na żywo”