

Osie potęgowe

Szybka powtórka

Zadanie 1. Dany jest okrąg $\mathcal{S}$ i punkt P . Prosta l przechodzi przez P i przecina $\mathcal{S}$ w punktach A i B (dopuszczamy sytuację, że $A = B$, tj. że l jest styczna do $\mathcal{S}$). Udowodnij, że wartość $PA \cdot PB$ nie zależy od wyboru prostej l .

Przy oznaczeniach z powyższego zadania, *potęgą punktu P względem okręgu $\mathcal{S}$* nazywamy liczbę

- a) $PA \cdot PB$ jeśli P leży na zewnątrz okręgu $\mathcal{S}$, lub
- b) 0 jeśli P leży na okręgu $\mathcal{S}$, lub
- c) $-PA \cdot PB$ jeśli P leży wewnątrz okręgu $\mathcal{S}$.

Wybór znaków wydaje się sztuczny, ale jest wygodny, bo dzięki temu zachodzi następujący fakt (wynikający natychmiast z Zadania 1.): potęga punktu P względem okręgu $\mathcal{S}$ jest równa $d^2 - R^2$, gdzie d to odległość P od środka okręgu, a R to promień okręgu.

Zadanie 2. Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt S jest punktem przecięcia prostych AB i CD , przy czym A jest wewnątrz odcinka BS , a C jest wewnątrz odcinka DS . Udowodnij, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $SA \cdot SB = SC \cdot SD$. Sformułuj analogiczne kryterium w przypadku, gdy S jest punktem przecięcia przekątnych $ABCD$.

Zadanie 3. *Lemat dla pałkarzy.* Dany jest okrąg $\mathcal{S}$ zadany równaniem $f(x, y) = 0$ gdzie $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$. Udowodnij, że potęga punktu (x_0, y_0) względem okręgu $\mathcal{S}$ jest równa $f(x_0, y_0)$.

Zadanie 4. Dane są dwa okręgi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ o środkach A i B , przy czym $A \neq B$. Udowodnij, że zbiór wszystkich punktów P , które mają taką samą potęgę punktu względem obu okręgów, jest prostą prostopadłą do prostej AB .

Prostą, o której mowa w powyższym zadaniu, nazywamy *osią potęgową* $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$.

Zadanie 5. Dane są okręgi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$, których środki nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że osie potęgowe par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$, $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$ oraz $(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_1)$ przecinają się w jednym punkcie. Co się stanie, jeśli pominiemy założenie, że środki nie leżą na jednej prostej?

Powyższa własność ma jasne zastosowanie w problemach olimpijskich: żeby pokazać, że jakieś trzy (cztery, pięć...) proste przecinają się w jednym punkcie, wystarczy pokazać, że te proste to osie potęgowe par okręgów jak w Zadaniu 4. Jako *toy-example* takiego zastosowania proponuję udowodnić przy pomocy osi potęgowych, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ponadto, osie potęgowe przydają się do pokazywania prostokątności prostych (w tym celu wykazujemy, że jedna z prostych jest osią potęgą dwóch okręgów, których środki leżą na drugiej prostej).

Zastosowania

Zadanie 6. Dane są trzy okręgi o niewspółliniowych środkach; każda para okręgów się przecina. Wykaż, że proste zawierające ich wspólne cięciwy przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 7. Okrąg o środku O , wpisany w czworokąt $ABCD$, jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N . Proste KL i MN przecinają się w punkcie P . Wykaż, że proste OP i BD są prostopadłe.

Zadanie 8. Dane są dwa okręgi rozłączne zewnętrznie. Dla każdej z ich wspólnych stycznych rozważmy środek odcinka pomiędzy punktami styczności. Wykaż, że punkty te są współliniowe.

Zadanie 9. Nieprostokątne przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E . Wykazać, że prosta przechodząca przez ortocentra BCE i ADE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki odcinków AB i CD .

Zadanie 10. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A , przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 11. *Twierdzenie Brianchona.*¹ Danych jest sześciokąt $ABCDEF$ opisany na okręgu. Udowodnij, że przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 12. Wewnątrz wielokąta wypukłego leży skończenie wiele parami rozłącznych okręgów. Wykaż, że można ten wielokąt podzielić na wielokąty wypukłe, z których każdy zawiera dokładnie jeden okrąg.

Zadanie 13. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym $\angle APD = \angle BPE = 90^\circ$. Wykaż, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

Zadanie 14. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F . Punkty K, L, M i N są odpowiednio środkami odcinków AE, AF, BF i BD . Proste KL i MN przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $SA = SB$.

¹A właściwie jego szczególny przypadek: teza zadania zachodzi w przypadku, gdy w $ABCDEF$ jest wpisana dowolna krzywa stożkowa.