

Nierówności

Litery oznaczają liczby rzeczywiste dodatnie, prócz że napisano inaczej. Zadania są uszeregowane raczej tematycznie niż względem poziomu trudności, ale zasadniczo można założyć, że nie są w żaden logiczny sposób ułożone.

Zadanie 1.

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Zadanie 2.

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Zadanie 3. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $xyz = 1$. Pokazać, że

$$(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27.$$

Zadanie 4.

$$3 + (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$$

Zadanie 5.

$$a+b+c \geq \sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab}$$

Zadanie 6. Udowodnić na przynajmniej dwa różne sposoby¹

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

Zadanie 7.

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli $x, y, z > 0$ oraz $x+y+z = xyz$ to

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Zadanie 9. Wyznacz największą wartość wyrażenia $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 10.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Zadanie 11.

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$$

Zadanie 12.

$$\frac{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)} \geq \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} + \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

Zadanie 13.

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n} \geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)^{b_1 + \dots + b_n}$$

¹spoiler: Jensen, Cauchy-Schwarz i pewnie nawet skisłe mleko sojowe z mojej lodówki...