Zadanie 5. Wiadomo , że liczba pierwsza p dzieli liczbę $\underbrace{111\ldots1}_{p}$.

Udowodnij , że $p = 3$.

Zadanie 6 . (XXXIII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij , że dla każdej liczby pierwszej p liczba

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

jest podzielna przez p .

Zadanie 7. Niech a i b będa liczbami naturalnymi, p zaś - liczbą pierwszą. Udowodnij , że jeżeli liczba $a^p - b^p$ jest podzielna przez p, to jest również podzielna przez p^2 .

XIII. TRYGONOMETRIA POMAGA NIE TYLKO GEOMETRII

Często przy rozwiązywaniu zadań z algebry dogodną bywa zamiana występującej w nim zmiennej (lub występujących w nim zmiennych, jeśli jest ich więcej) na odpowiednią funkcję trygonometryczną. Otrzymujemy w ten sposób do rozwiązania zadanie z trygonometrii. I to podstawienie trygonometryczne ma oczywiście sens wtedy, gdy znacznie upraszcza rozwiązanie danego problemu. Wybór tej czy innej funkcji trygonometrycznej zależy przy tym od postaci równania, nierówności czy też innej formy zadaniowej, z którą przyszło nam zmagać się. Często forma ta, to jakiś ukryty wzór trygonometryczny tyle, że ubrany w algebraiczną szatę. Czasem jednak podstawienie takie narzucają założenia, które musi spełniać występująca w danym zadaniu zmienna.

Na przykład, jeśli z warunków zadania wynika, że musi być $|x| \le 1$, to dogodnymi bywają podstawienia

$$x = \sin\alpha\,,\quad \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

lub $$x = \cos\alpha\,,\quad \alpha \in \langle 0, \pi \rangle,$$

przy czym - które z nich - zależy od konkretnego zadania.

W przypadku, kiedy zmienna x może przyjąć dowolną wartość, możemy podstawić np.

$$x = \operatorname{tg}\alpha\,,\quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

lub $$x = \operatorname{ctg}\alpha\,,\quad \alpha \in (0, \pi).$$

Prześledźmy to na konkretnych zadaniach.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie

(1) $$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

Rozwiązanie:

❑ Musimy tutaj oczywiście założyć, by $|x| \le 1$.

Teraz, zatroszczywszy się o nieujemność prawej strony danego równania, możemy podnieść jego obie strony do kwadratu. Otrzymamy równanie algebraiczne ... być może niełatwe do rozwiązania.

Pójdźmy zatem inną drogą.

Podstawiając w równaniu (1) $x = \cos\alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, przechodzimy do równania

(2) $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, czyli równania

(3) $|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$.

Ale $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, więc $\sin\alpha \ge 0$ i równanie (3) przybiera postać

(4) $\sin\alpha = \cos 3\alpha$, czyli

(5) $$\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{z} - \alpha\right) = 0.$$

Rozwiązując to ostatnie równanie, otrzymamy

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}, \text{ lub } \alpha = \frac{3}{4}\pi + n\cdot\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Warunek $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ spełniają trzy wartości: $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \frac{5}{8}\pi$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}\pi$. Wobec tego ostatecznie:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \cos\frac{5}{8}\pi = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{8}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \cos\frac{3}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem, zbiorem rozwiązań danego równania jest

$$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy najpierw, że jeżeli trójka liczb (x, y, z) spełnia podany układ równań, to nie może zachodzić żaden z warunków: $|x| = 1$, $|y| = 1$, $|z| = 1$ (*dlaczego?*).

Gdy zaś $|x| \ne 1$ i $|y| \ne 1$ i $|z| \ne 1$, to dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases}$$

Podstawmy tutaj $x = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

(co narzucają lewe strony powyższych równań, przypominając znany wzór $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$). Wówczas z naszego układu otrzymujemy:
$y = \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, $x = \operatorname{tg} 8\alpha$. Stąd mamy równanie

$$\operatorname{tg} 8\alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{skąd}$$

$$8\alpha = \alpha + n \cdot \pi, \quad \text{czyli}$$

$$\alpha = n \cdot \frac{\pi}{7}, \text{ gdzie } n \in \mathbf{Z}.$$

Ostatecznie:

(*) $\quad x = \operatorname{tg}\left(n \cdot \frac{\pi}{7}\right), \; y = \operatorname{tg}\left(n \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \; z = \operatorname{tg}\left(n \cdot \frac{4\pi}{7}\right),$

gdzie $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Łatwo sprawdzić, że liczby postaci (*) spełniają podany układ równań. ■

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4xy\left(2x^2 - 1\right) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Drugie równanie danego układu sugeruje, by podstawić: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Wówczas pierwsze równanie układu przyjmie postać

$$4\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 1, \text{ czyli kolejno}$$

$$2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 1,$$

$$\sin 4\alpha = 1.$$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymamy:

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ skąd}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{Z}.$$

Tak więc $x = \cos\left(\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \sin\left(\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Rozważmy teraz cztery przypadki:

1° $\quad k \equiv 0 \pmod 4$. Wówczas $x = \cos\frac{\pi}{8}$, $y = \sin\frac{\pi}{8}$.

2° $\quad k \equiv 1 \pmod 4$. Wówczas $x = -\sin\frac{\pi}{8}$, $y = \cos\frac{\pi}{8}$.

3° $\quad k \equiv 2 \pmod 4$. Wówczas $x = -\cos\frac{\pi}{8}$, $y = -\sin\frac{\pi}{8}$.

4° $\quad k \equiv 3 \pmod 4$. Wówczas $x = \sin\frac{\pi}{8}$, $y = -\cos\frac{\pi}{8}$.

Ostatecznie otrzymujemy

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanego układu jest

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right\}. \quad ■$$

Zadanie 4. Spośród wszystkich rozwiązań układu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + v^2 = 9 \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

wyznacz te, dla których suma $x + z$ osiąga wartość największą.

Rozwiązanie:

❑ Dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^2 = 1 \\ xv + yz \ge 6\,. \end{cases}$$

Podstawmy tutaj: $x = 2\cos\alpha,\quad y = 2\sin\alpha$

$z = 3\cos\beta,\quad v = 3\sin\beta,$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Wówczas $xv + yz = 6\sin(\alpha + \beta)$.

Tak więc

$$xv + yz \ge 6 \Leftrightarrow 6\sin(\alpha+\beta) \ge 6 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$ gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Zatem $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi$.

Mamy więc

$$x = 2\cos\alpha$$

$$z = 3\cos\beta = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi\right) = 3\sin\alpha$$

Stosując znaną nierówność

(*) $ab + cd \le \sqrt{a^2 + c^2}\cdot\sqrt{b^2 + d^2}$, prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, możemy szacować:

$$x + z = 2\cos\alpha + 3\sin\alpha \le \sqrt{2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{13}$$

przy czym

$$x + z = \sqrt{13} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(gdyż w nierówności (*) równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c, d spełniają warunek $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$).

Tak więc $x + z = \sqrt{13} \Leftrightarrow 2\sin\alpha = 3\cos\alpha$. Stąd

$4\sin^2\alpha = 9\cos^2\alpha$, czyli $\sin\alpha \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$ i $\cos = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Wracając do podstawień otrzymujemy, że tylko dla czwórki liczb:

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}},\quad y = \frac{6}{\sqrt{13}},\quad z = \frac{9}{\sqrt{13}},\quad v = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

spełniającej podany układ, suma $x + z$ osiąga wartość największą. ■

Zadanie 5. Niech $f(x, y) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2}\cdot\sqrt{1 + y^2}}$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$f(a, c) \le f(a, b) + f(b, c).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\alpha$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Wówczas

$$f(a, b) = \frac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right|}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2\beta}}} =$$

$$= \left| \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \right| \cdot |\cos\alpha \cdot \cos\beta| = |\sin(\alpha - \beta)|.$$

Analogicznie

$$f(b, c) = |\sin(\beta - \gamma)|, \qquad f(a, c) = |\sin(\alpha - \gamma)|.$$

Korzystając ze znanych własności funkcji $x \to |x|$ oraz z ograniczoności przez 1 funkcji $x \to |\cos x|$ otrzymujemy:

$$f(a, c) = |\sin(\alpha - \gamma)| = |\sin((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma))| =$$

$$= |\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma) \cdot \cos(\alpha - \beta)| \le$$

$$\le |\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\beta - \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma) \cdot \cos(\alpha - \beta)| =$$

$$= |\sin(\alpha - \beta)| \cdot |\cos(\beta - \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma)| \cdot |\cos(\alpha - \beta)| \le$$

$$\le |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| = f(a, b) + f(b, c). \quad \blacksquare$$

Zadania 6. Udowodnij, że jeżeli

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad xu + yv = 0, \quad \text{to}$$

$$x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad xy + uv = 0.$$

Rozwiązanie:

❑ Z podanych założeń wynika, że

$$|x| \le 1, \quad |y| \le 1, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1.$$

Zatem, niech $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $u = \cos\beta$, $v = \sin\beta$.
Wówczas

$$xu + yv = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{gdzie} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Możemy więc obliczać :

$$x^2 + u^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\alpha + \left((-1)^{k+1} \cdot \sin\alpha\right)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

W podobny sposób otrzymamy, że $\qquad y^2 + v^2 = 1.$

I na koniec

$$xy + uv = \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\left(\alpha + (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\alpha \cdot \sin\alpha - (-1)^{k+1} \cdot \sin\alpha \cdot (-1)^{k+1} \cdot \cos\alpha = 0 \quad \blacksquare$$

Zadanie 7. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}}, \quad n \ge 1.$$

Oblicz $\lim\limits_{n \to \infty} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$.

Rozwiązanie :

❑ Widzimy, że jeżeli $\alpha = \frac{\pi}{3}$, to

$$x_1 = \cos\alpha$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Zakładając, że $x_n = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, otrzymujemy:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że

$$x_n = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} \qquad \text{dla każdego naturalnego } n.$$

Wobec tego

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} =$$

$$= \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{2^{n-1} \cdot \sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}}} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

i widzimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. ■

Zadanie 8. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

(1) $|x| \neq 1, \quad |y| \neq 1, \quad |z| \neq 1,$

(2) $x + y + z = xyz.$

Udowodnij, że

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}.$$

Rozwiązanie.

❑ Podstawmy: $x = \operatorname{tg}\alpha, \quad y = \operatorname{tg}\beta, \quad z = \operatorname{tg}\gamma$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Wówczas warunek (2) przyjmuje postać

(3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$

Oczywiście, musi być $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 1$ i $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \neq 1$ i $\operatorname{tg}\gamma \cdot tg\alpha \neq 1$. W przeciwnym wypadku, gdyby np. było $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, to otrzymalibyśmy równości

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$ i $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, skąd wynika, że

$$\operatorname{tg}^2\alpha = -1 \text{ - co jest niemożliwe.}$$

Zatem warunek trzeci jest równoważny kolejno równościom:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Stąd wnioskujemy, że $\alpha + \beta + \gamma = n \cdot \pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

Wobec tego $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2n\pi$, skąd

$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} 2\gamma.$

Z równości tej w oczywisty sposób otrzymujemy tezę zadania. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równania:

(a) $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$ Odp. $\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\}.$

(b) $\left|2x - \sqrt{1-4x^2}\right| = \sqrt{2}\left(8x^2 - 1\right).$ Odp. $\left\{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}.$

(c) $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1.$ Odp. $\{2\}.$

2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

Odp. $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -1\right)\right\}.$

3. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

(1) $|x| \neq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |y| \neq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z| \neq \frac{1}{\sqrt{3}},$

(2) $x + y + z = xyz.$

Udowodnij, że

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

4. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{2^{2n+1} - 2^{2n+1}\sqrt{4^n - x_n^2}} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Wykaż, że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ i oblicz ją.

Odp. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi.$

5. Ile rozwiązań posiada w przedziale $< 0, 1 >$ równanie

$$8x\left(2x^2 - 1\right)\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = 1?$$

Odp. Trzy.

6. Ciąg (x_n) jest określony następująco

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1,03.$$

XIV. ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW W ZADANIACH NIE TYLKO GEOMETRYCZNYCH

Znane są nam dobrze zastosowania iloczynu skalarnego wektorów do pewnych zagadnień miarowych czy też incydencji (jak prostopadłość prostych). Używając iloczynu skalarnego otrzymujemy np. zwięzły i przejrzysty dowód twierdzenia cosinusów albo twierdzenia o równoległoboku, które głosi, że "czworokąt wypukły jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów długości przekątnych i kwadratów długości wszystkich boków są równe.

A warto wiedzieć, że iloczyn skalarny czyni bardzo przejrzystymi i prostymi dowody wielu, wcale niełatwych, nierówności. Jak elegancko można przy jego użyciu rozwiązać równanie czy układ równań.

W niniejszym rozdziale zajmiemy się głównie właśnie tymi zastosowaniami iloczynu skalarnego. Zanim jednak przystąpimy do zadań, przypomnijmy, że:

Iloczynem skalarnym wektorów niezerowych u i v nazywamy liczbę równą $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{u}, \vec{v})$ i piszemy

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{u}, \vec{v}).$$

Jeżeli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.
A oto własności tego iloczynu.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

1° $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$ (przemienność),