

Mix teoriolichbowy

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną, to $2^{2^n} + 1$ nie jest sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie 2. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (m, n) , dla których $n \mid (m^2 + 1)$ oraz $m \mid (n^2 + 1)$

Zadanie 3. Niech p będzie liczbą pierwszą, a a, b liczbami naturalnymi. Pokazać, że jeśli $a^p - b^p$ jest podzielne przez p , to jest też podzielne przez p^2 .

Zadanie 4. Liczby naturalne a_n, b_n spełniają równość

$$a_n + b_n \sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{2n+1}.$$

Udowodnij, że liczby a_n i b_n są nieparzyste i spełniają zależność

$$\left(\frac{a_n + (-1)^n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n - (-1)^n}{2}\right)^2 = b_n^2$$

Zadanie 5. Dla ustalonej liczby naturalnej m wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > m$ takie, że w ciągu

$$\binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{m}$$

każdy wyraz dzieli wszystkie następujące po nim.

Zadanie 6. Liczby naturalne a, b spełniają $(a^n + n) \mid (b^n + n)$ dla dowolnej liczby naturalnej n . Udowodnij, że $a = b$.

Zadanie 7. Pokaż, że nie istnieje wielomian W o tej własności, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $W(n)$ jest pierwsza.

Zadanie 8. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $n^3 - 1 = k^2$.

Zadanie 9. Niech p będzie liczbą pierwszą, a n oraz k liczbami naturalnymi. Niech

$$n = \overline{n_s \dots n_0}_p, k = \overline{k_s \dots k_0}_p$$

będą zapisami tych liczb w systemie o podstawie p , przy czym dopuszczamy, że początkowe cyfry są zerowe. Pokazać, że

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^s \binom{n_i}{k_i} \pmod{p}$$