

Układy równań i równania funkcyjne

Równania funkcyjne

Treść każdego zadania brzmi „Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y, \dots \in \mathbb{R}$ zachodzi (...)”.

Zadanie 1. $f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$

Zadanie 2. $(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$

Zadanie 3. $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$

Zadanie 4. $f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$

Zadanie 5. $f(x + y)(1 - f(x)f(y)) = f(x) + f(y)$

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniające równość $19f(x) - 17f(f(x)) = 2x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}$.

Układy równań

O ile nie zaznaczono inaczej, rozwiązań szukamy w liczbach rzeczywistych.

Zadanie 7.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$$

Zadanie 8. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Pokazać, że $a + b + c + d = 0$.

Zadanie 9.
$$\begin{cases} 36x^2 + 9y^4 + 4z^6 = 1 \\ x + y^2 + z^3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Zadanie 10.
$$\begin{cases} 2y^2 - x = 1 \\ 2z^2 - y = 1 \\ 2x^2 - z = 1 \end{cases}$$

Zadanie 11.
$$\begin{cases} ab + cd = 6 \\ ac + bd = 3 \\ ad + bc = 2 \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

Zadanie 12.
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 + 3 \operatorname{ctg} x_1 = 2 \operatorname{tg} x_2 \\ \operatorname{tg} x_2 + 3 \operatorname{ctg} x_2 = 2 \operatorname{tg} x_3 \\ \vdots \\ \operatorname{tg} x_{n-1} + 3 \operatorname{ctg} x_{n-1} = 2 \operatorname{tg} x_n \\ \operatorname{tg} x_n + 3 \operatorname{ctg} x_n = 2 \operatorname{tg} x_1 \end{cases}$$

Zadanie 13.
$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3cb^2 + 3ca^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

Zadanie 14. Dane są $a > b > c > 0$. Znaleźć wszystkie $x \in \mathbb{R}_+$ takie, że

$$x^2 \sqrt{3} = \sum_{cyc} \sqrt{((a+b)^2 - x^2)(x^2 - (a-b)^2)}$$