Niezmienniki[1]

Wiele zadań kombinatorycznych ma następującą formę:

Zaczynamy od sytuacji A i możemy wykonywać pewne określone ruchy. Czy możemy dojść do sytuacji B?

Bardzo przydatną techniką, żeby pokazać, że nie możemy dojść do sytuacji B, jest użycie niezmienników: definiujemy pewną wielkość, którą przypisujemy do każdej możliwej sytuacji, i która ma tę wygodną własność, że nie zmienia się przy wykonywaniu dozwolonych ruchów. Jeśli ta wielkość dla sytuacji A niż dla sytuacji B, to nie możemy dojść do sytuacji B. Żeby zilustrować tę technikę, zaczniemy od następującego prostego zadania:

Zadanie 1. Mamy 1 dukat i 0 talarów. W pierwszym kantorze możemy wymienić 1 dukat na 10 talarów, w drugim natomiast - 1 talara na 10 dukatów. Czy możemy tak wymieniać pieniądze, żeby na końcu mieć tyle samo dukatów co talarów?

Rozwiązanie: Pomyślmy (w każdej możliwej sytuacji) o różnicy między liczbą dukatów a liczbą talarów. Zauważmy, że wymieniając pieniądze w pierwszym kantorze zwiększa się ona o $10 + 1 = 11$, zaś w drugim kantorze zmniejsza się o $10 + 1 = 11$. W takim razie reszta z dzielenia przez 11 tej różnicy jest niezmiennikiem. Skoro zaś na początku jest ona równa 1, a na końcu miałaby być równa 0, to opisana wymiana nie jest możliwa.

Oczywiście, jeśli w danym zadaniu jest możliwe dojście z sytuacji A do sytuacji B, to żaden niezmiennik bezpośrednio tego nie rozstrzygnie. W zadaniu 5. zobaczymy jednak, że można tę technikę stosować też do takich celów.

Cała sztuka w stosowaniu tej techniki polega na odpowiednim doborze niezmiennika. Przeanalizujemy jeszcze kilka przykładów:

Zadanie 2. Na szachownicy 2019×2021 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Czy można poprzestawiać je tak, aby każdy pionek znajdował się na polu sąsiadującym bokiem z polem, które zajmował i żeby wciąż na każdym polu był dokładnie jeden pionek?

Rozwiązanie: Pokolorujmy szachownicę standardowo, na przemian czarne-białe. Zauważmy, że różnica między liczbą pól białych a liczbą pól czarnych jest równa jeden. Gdyby opisana sytuacja była możliwa, to liczba pól czarnych byłaby taka sama jak liczba pól białych, bo pionek będący na polu czarnym musi przejść na sąsiadujące pole białe (i vice versa). W takim razie opisana sytuacja nie jest możliwa.

[1]na podstawie artykułu Urszuli Pastwy i Joachima Jelisiejewa ”Metoda niezmienników” w ”Seminarium olimpijskie z matematyki, część pierwsza”, KG OMG, Warszawa 2014

Zadanie 3. Smok ma 2019 głów. Rycerz potrafi zadać następujące ciosy:

1. ściąć dokładnie 29 głów, ale wtedy smokowi odrasta 69 głów
2. ściąć dokładnie 33 głowy, ale wtedy smokowi odrasta 1 głowa
3. ściąć dokładnie 8 głów, i wtedy nic smokowi odrasta.

Mówimy, że smok został zabity, jeśli stracił wszystkie głowy (niezależnie czy po danym ciosie powinno mu coś odrosnąć). Czy rycerz może zabić smoka?

Rozwiązanie: Nie. Zauważmy, że

- stosując cios typu 1. smok zyskuje $69 - 29 = 40$ głów,
- stosując cios typu 2. smok traci $33 - 1 = 32$ głowy,
- stosując cios typu 3. smok traci 8 głów.

W takim razie reszta z dzielenie liczby głów przez 4 nie zmienia się! Z drugiej strony, na początku ta reszta jest równa 3, a na końcu 0. W takim razie rycerz nie może zabić smoka.

Zadanie 4. Mamy 37 skarpet seledynowych, 21 skarpet bordowych i 13 skarpet akwamarynowych. Ruch polega na zamienieniu dwóch skarpet różnych kolorów na parę skarpetę trzeciego koloru. Czy możemy, wykonując pewną liczbę ruchów, uzyskać wszystkie skarpety w jednym kolorze?

Rozwiązanie: Niech r oznacza różnicę między liczbą skarpet seledynowych i bordowych. Rozważmy jak dozwolone ruchy wpływają na r:

- zamieniając skarpetę seledynową i bordową na parę akwamarynowych, r nie zmienia się,
- zamieniając skarpetę seledynową i akwamarynową na parę bordowych, r zmniejsza się o 3,
- zamieniając skarpetę bordową i akwamarynową na parę skarpet seledynowych, r zwiększa się o 3.

W takim razie reszta z dzielenie r przez 3 nie zmienia się przy żadnej wymianie. Na początku $r = 37 - 21 = 16 \equiv 1 \pmod 3$, natomiast gdy wszystkie skarpety są w jednym kolorze, to $r = 0$, zatem opisana sytuacja nie jest możliwa.

Zadanie 5. Zapisujemy na tablicy liczbę 2019!. W każdym ruchu ścieramy liczbę widoczną na tablicy i piszemy jej sumę cyfr. Jaka liczba zostanie na tablicy, gdy dojdziemy do liczby jednocyfrowej?

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n, suma cyfr n ma taką samą resztę z dzielenia przez 9 jak n. Wobec tego przy opisanym w zadaniu procesie, reszta z dzielenia liczby na tablicy przez 9 się nie zmienia. Skoro zaś na początku była równa 0, to tak musi być też jak dojdziemy do liczby jednocyfrowej. W takim razie na tablicy zostanie 9.

Zadanie 6. Na każdym polu szachownicy $2n \times 2n$ stoi pionek. Możemy wykonywać następującą operację: wybieramy 3 sąsiadujące pola znajdujące się w jednym rzędzie (kolumnie). Jeśli na skrajnych polach znajduje się przynajmniej jeden pionek, to możemy z każdego z nich wziąć po jednym pionku i położyć na środkowe pole. Czy możemy doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie pionki są na jednym polu szachownicy?

Rozwiązanie: Ponumerujmy kolumny liczbami od 1 do $2n$. Dla danego układu pionków sumę $S = 1 \cdot a_1 + \cdots + 2n \cdot a_{2n}$, gdzie a_k oznacza liczbę pionków w danej kolumnie. Sprawdźmy jak zachowuje się S przy operacjach opisanych w zadaniu:

- jeśli przestawiamy pionki w jednej kolumnie, to S się nie zmienia,
- jeśli przestawiamy pionki w jednym rzędzie, to S również się nie zmienia: załóżmy, że środkowe pole leży w kolumnie o numerze k. Zdejmujemy po jednym pionku z kolumn o numerach $k-1$ i $k+1$, i kładziemy je na pole o numerze k, w takim razie suma po zamianie jest równa:

$$S - (k-1) - (k+1) + 2 \cdot k = S$$

W takim razie S jest niezmiennikiem. Gdy na każdym polu jest dokładnie jeden pionek, to $S = 2n \cdot 1 + \cdots + 2n \cdot 2n = 2n \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2(2n+1)$. Gdy wszystkie pionki są na jednym polu, to $S = k \cdot 4n^2$, gdzie k jest numerem kolumny pola, na którym są wszystkie pionki. Jeśli opisana sytuacja byłaby możliwa, to mielibyśmy

$$2n^2(2n+1) = k \cdot 4n^2$$

więc

$$k = \frac{2n+1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Ćwiczenia

Ćwiczenie 1. Na tablicy wypisano liczby od 1 do 666. W każdym ruchu wybieramy dwie liczby, ścieramy je i dopisujemy do tablicy ich różnicę. Czy możemy tak wykonywać ruchy, żeby na tablicy została tylko liczba 14?

Ćwiczenie 2. Rysujemy $(4n+2)$-kąt foremny i na każdym jego wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów, a następnie przełożenie z każdego na pole, które sąsiadowało z wierzchołkiem, na którym dany żeton leżał. Czy możemy dojść do sytuacji, że wszystkie żetony leżą na jednym wierzchołku?

Ćwiczenie 3. Na szachownicy $2n \times 2n$ w jednym polu jest wpisana liczba -1, a w pozostałem $+1$. Ruch polega na zmienieniu wszystkich liczb w danym kolumnie, danym wierszu lub danej głównej przekątnej na liczby przeciwne. Czy możemy tak wykonywać ruchy, aby otrzymać szachownicę z samymi $+1$?

Ćwiczenie 4. Rozważmy sytuację jak w poprzednim ćwiczeniu, ale z dodatkowym możliwym ruchem: możemy zmienić znaki na przeciwne wszystkim liczbą, które leżą na jednej linii równoległej do którejś z głównych przekątnych i przechodzącej przez środki boków. Dodatkowo, każde pole na szachownicy zawiera liczbę $+1$, prócz jednego pola, które leży na brzegu szachownicy, ale nie w wierzchołku. Na tym polu stoi liczba -1. Czy teraz możemy doprowadzić do sytuacji, w której na całej szachownicy będą same $+1$?

Wskazówki do ćwiczeń

Wskazówka do ćw. 1. Pomyśleć o sumie wszystkich liczb na tablicy.

Wskazówka do ćw. 2. Pomyśleć o liczbie żetonów na polach o parzystych numerach.

Wskazówka do ćw. 3. Pomyśleć o iloczynie wszystkich liczb na tablicy.

Wskazówka do ćw. 4. Pomyśleć o tym, dlaczego niezmiennik z poprzedniego ćwiczenia nie działa i jak można to naprawić.