

Zadanie domowe 1

Krzywe, styczne i pierścienie lokalne.

W zadaniach (o ile nie zaznaczono inaczej) k oznacza ciało algebraicznie domknięte charakterystyki zero. W przypadku prośby o rysunek, należy wykonać rysunek odpowiednich zbiorów afinicznych dla $k = \mathbb{R}$. Na potrzeby tej listy krzywa to nierozkładalny podzbiór płaszczyzny wymiaru 1.

Styczne

Niech C będzie krzywą na płaszczyźnie zadaną równaniem $F = 0$, gdzie $F \in k[X, Y]$ jest (niestałym) nierozkładalnym wielomianem i niech $p = (a, b) \in C$. **Przestrzenią styczną do C w punkcie p** nazywamy podzbiór $T_p C \subseteq k^2$ zadany równaniem

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a, b)(X - a) + \frac{\partial F}{\partial Y}(a, b)(Y - b) = 0.$$

Punkt p nazywamy **punktem osobliwym krzywej C** , jeśli $T_p C$ jest całą płaszczyzną (tzn. $\frac{\partial F}{\partial X}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial Y}(a, b) = 0$), w przeciwnym razie nazywamy p **punktem gładkim krzywej C** .

Zadanie 1. Naszkicuj krzywe o równaniach

1. $Y - X^2 = 0$,
2. $Y^2 - X^3 = 0$,
3. $Y^2 - X^3 + X^2 = 0$,
4. $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$,
5. $2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4 = 0$.

Znajdź ich punkty osobliwe. Czy punkty osobliwe wyglądają osobliwie? Jeśli nie, spróbuj podać uzasadnienie tego faktu. Nanieś na rysunek styczne w wybranym punkcie gładkim.

Zadanie 2. Przypomnij sobie (dwuwymiarowe) twierdzenie Taylora z analizy matematycznej, a następnie połącz następujące obiekty.

1. Równanie przestrzeni stycznej do C w punkcie (a, b) .
2. Rozwinięcie Taylora $F(X, Y)$ w punkcie (a, b) .

Pokaż, że każda krzywa ma tylko skończenie wiele punktów osobliwych.

Formą stopnia m nazywamy wielomian $G \in k[X, Y]$, którego każdy jednomian ma stopień k (tutaj wielomiany stałe traktujemy jako formy stopnia 0). Łatwo zauważyć, że każdy wielomian $F \in k[X, Y]$ stopnia n jednoznacznie zapisuje się jako suma $F = F_0 + F_1 + \dots + F_n$ gdzie F_i jest formą stopnia i dla $i = 0, \dots, n$. **Członem wiodącym F** (lokalna definicja) nazywamy pierwszą formę w ciągu $F_0, F_1, \dots, F_n$, która nie jest równa zero.

Zadanie 3. W punkcie osobliwym przestrzeń styczna jest całą płaszczyzną, co wygląda nienaturalnie, bo na rysunku widać kilka narzucających się kandydatek na proste styczne w punktach osobliwych. Celem tego zadania jest znalezienie tego „prawidłowego” pojęcia prostej stycznej w punkcie osobliwym.

1. Pokaż, że zbiór miejsc zerowych formy stopnia m jest sumą skończenie wielu (ilu?) prostych przechodzących przez zero.
2. Dla każdej krzywej o równaniu $F = 0$ z Zadania 1. nanieś na rysunek zbiór zer członu wiodącego F . Czy widzisz jakąś prawidłowość?
3. Spróbuj zdefiniować pojęcie „krotności styczności prostej do krzywej” i wyznaczyć te krotności dla krzywych i prostych z poprzedniego punktu.