

Funkcje tworzące i gdzie je znaleźć

Poradnik dla zagubionych

יעקב גוגולוק

Damn.

@nocturnaltrashposts

I exist.



Wstęp

Skrypt składa się z trzech części:

- W rozdziałach 1, 2 oraz 3 dowiemy się, co to są funkcje tworzące i nauczymy się podstawowych manipulacji nimi.
- W rozdziale 4 pomęczymy się znajdowaniem funkcji tworzących różnych ciągów.
- W rozdziale 5 zastosujemy zdobyte umiejętności do odpowiadania na różne pytania o ciągi liczbowe.

W tekście skryptu są umieszczone w miarę dokładnie omówione **Przykłady**, a także **Problemy** do samodzielnego rozwiązania. Problemy są zazwyczaj rozbite na drobne kroki i **są absolutnie obowiązkowe do wykonania** jeśli ktoś chce opanować materiał. Tyczy się to szczególnie rozdziałów 4 oraz 5.

Na marginesach są umieszczone dodatkowe zadania, które mają pomóc w oswojeniu się z materiałem, a także wskazówki, dodatkowe komentarze oraz bezowocne próby autora w byciu zabawnym.

Może i skrypt nie jest zabawny, ale za to też nie został napisany na czas.

Na końcu jest dostępna ściaga z przydatnymi wzorami, do której można zaglądać w razie potrzeby. Zawiera ona w szczególności wszystkie wzory, które są wprowadzane w skrypcie.

Spis treści

Wstęp	2
1 Funkcje tworzące	3
2 Operacje na funkcjach tworzących	4
2.1 Dodawanie i skalowanie	4
2.2 Przesuwanie indeksów	4
2.3 Mnożenie i dzielenie przez n	5
2.4 Iloczyn szeregów	5
3 Interludium: uogólniony symbol dwumianowy	7
4 Znajdowanie funkcji tworzących	9
5 Zastosowania	11
Ściaga	12

1 Funkcje tworzące

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Funkcją tworzącą ciąg (a_n) nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Przykład 1: Ciąg stały

Znajdźmy funkcję tworzącą f ciągu $a_n = 2$ (ciąg stały). Z definicji

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ &= 2 + 2x + 2x^2 + \dots \\ &= 2(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego $1 + \heartsuit + \heartsuit^2 + \dots = \frac{1}{1-\heartsuit}$ dla $\heartsuit = x$.

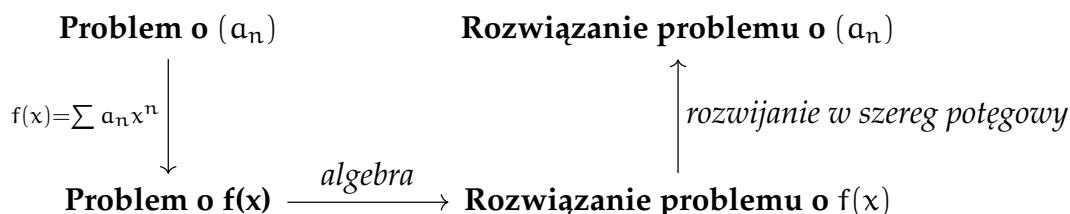
Komentarz dla dociekliwych/pedantów/mnie:
Ten szereg jest "szeregiem formalnym", co znaczy że nie koniecznienie myślimy sobie o nim jako o funkcji, tylko jak o pewnym zapisie. Funkcja tworząca ciągu $a_n = n^n$ jest szeregiem, który zbiega (czyli ma sumę) tylko dla $x = 0$, ale nie przeszkadza nam to operować na jego funkcji tworzącej.

Powinno się w tym miejscu zrodzić krytyczne pytanie *po co?* Funkcja tworzącą na razie to w najlepszym razie *fancy* sposób na przechowywanie wyrazów ciągu. Żeby zobaczyć użyteczność tego pojęcia, będziemy musieli przejść pewną drogę, której motyw przewodni jest następujący:

Każdy ciąg (a_n) wyznacza swoją funkcję tworzącą i vice versa - mając daną funkcję tworzącą $f(x)$ jakiegoś ciągu (a_n) , potrafimy ten ciąg odtworzyć. W takim razie, dowolne pytanie dotyczące ciągu (a_n) można (przynajmniej w teorii) przetłumaczyć na pytanie dotyczące jego funkcji tworzącej $f(x)$. Miłym zrzędzeniem losu okazuje się, że różne naturalne pytania na temat ciągów łatwiej rozwiązać na poziomie funkcji tworzących!

„Potrafimy” jest pod warunkiem, że potrafimy rozwijać funkcję w szeregi potęgowe...

Nasz plan działania można przedstawić następująco:



W następnym rozdziale zajmiemy się strzałką po lewej stronie tego diagramu i nauczymy się operować na funkcjach tworzących. Zobaczymy jak różne operacje na ciągach tłumaczą się na odpowiadające im funkcje tworzące. Uzbrojeniu w tę wiedzę, przeliczymy kilka przykładów na znajdowanie funkcji tworzących, a następnie zastosujemy zdobyte umiejętności do rozwiązywania problemów o ciągach.

2 Operacje na funkcjach tworzących

2.1 Dodawanie i skalowanie

Łatwo przeliczyć, że jeśli f jest funkcją tworzącą ciąg (a_n) , a g jest funkcją tworzącą ciąg (b_n) , to $f + g$ jest funkcją tworzącą ciąg $(a_n + b_n)$. Analogicznie, jeśli c jest stałą, to funkcją tworzącą ciąg (ca_n) jest $cf(x)$. **Zadanie:** Przelicz to!

Zobaczmy co się stanie, gdy zamiast $cf(x)$ obliczymy $f(cx)$:

$$\begin{aligned}f(cx) &= a_0 + a_1(cx) + a_2(cx)^2 + a_3(cx)^3 + \dots \\&= a_0 + (ca_1)x + (c^2a_2)x^2 + (c^3a_3)x^3 + \dots.\end{aligned}$$

Widzimy, że $f(cx)$ jest funkcją tworzącą ciąg $c^n a_n$.

Przykład 2: Prosta suma

Wiemy, że $f(x) = \frac{2}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciąg $a_n = 2$. W takim razie, funkcją tworzącą ciąg $b_n = 2 \cdot 3^n$ jest $f(3x) = \frac{2}{1-3x}$.

Problem 1: Plus i minus to jedyne co widzę

Założmy, że $f(x)$ jest funkcją tworzącą ciąg (a_n) . Rozważamy ciąg (b_n) , którego wyrazy to $a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, \dots$.

1. Przekontempluj, że $b_n = (-1)^n a_n$. Zapamiętaj na wieczność, że $(-1)^n$ można używać w taki sposób.
2. Jak wygląda funkcja tworząca ciąg (b_n) ? Zapisz ją, używając $f(x)$.

Zadanie dla osób, które nie złapały nawiązania: Odsłuchać utworu „Plus i minus” zespołu Kaliber 44.

Problem 2: Sumy funkcji wykładniczych

1. Znajdź funkcje tworzące ciągów $a_n = 2^n$, $b_n = (-5)^n$
2. Korzystając z poprzedniego podpunktu, znajdź funkcję tworzącą ciąg $c_n = 2^{n+1} + 3 \cdot (-5)^n$.
3. Znajdź funkcję tworzącą ciąg $2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$

Wskazówka: Jak się ma 2^{n+1} do 2^n ?

Wskazówka: użyj $(-1)^n$, żeby zapisać jawny wzór na ten ciąg.

2.2 Przesuwanie indeksów

Zobaczmy, co się stanie, gdy przemnożymy funkcję tworzącą przez x :

$$\begin{aligned}x \cdot f(x) &= x \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\&= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots;\end{aligned}$$

dla pełni szczęścia dopiszmy zero

$$x \cdot f(x) = 0 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$$

W takim razie, $xf(x)$ jest funkcją tworzącą ciąg (b_n) danego wzorem $b_0 = 0$ oraz $b_n = a_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Innymi słowy, przesuwamy ciąg (a_n) o jeden indeks w prawo:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \longmapsto (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

Co zrobić, jeśli chcemy przesunąć indeksy w drugą stronę, czyli znaleźć funkcję tworzącą ciąg $c_n = a_{n+1}$? Skoro mnożenie przez x przesuwa ciąg (a_n) w prawo, to pewnie żeby przesunąć w lewo należy podzielić przez x ... Zobaczmy, czy tak rzeczywiście jest:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \cdot f(x) &= \frac{1}{x} \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\ &= \frac{a_0}{x} + a_1 + a_2x + \dots\end{aligned}$$

Przeszkadza nam człon $\frac{a_0}{x}$, więc zgodnie z sowiecką metodologią - pozbadźmy się go

$$a_1 + a_2x + \dots = \left(\frac{a_0}{x} + a_1 + a_2x + \dots \right) - \frac{a_0}{x} = \frac{1}{x} \cdot f(x) - \frac{a_0}{x} = \frac{f(x) - a_0}{x}.$$

Morał: funkcja tworząca ciąg $b_n = a_{n+1}$ wyraża się wzorem $\frac{f(x) - a_0}{x}$.

Problem 3: Podwójne przesuwanie

Niech (a_n) będzie ciągiem o funkcji tworzącej $f(x)$. Jak wygląda funkcja tworząca ciąg (b_n) danego wzorem $b_n = a_{n+2}$?

2.3 Mnożenie i dzielenie przez n

Zobaczmy, co się stanie, gdy zróżniczkujemy funkcję tworzącą:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)' \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots\end{aligned}$$

Widzimy, że f' jest funkcją tworzącą ciąg $b_n = (n+1)a_{n+1}$. Korzystając z przesuwania indeksów z poprzedniego podrozdziału możemy też wydobyc z tego funkcję tworzącą ciąg $c_n = na_n$, mianowicie $xf'(x)$.

Zadanie: zweryfikuj, że wynik to faktycznie $xf'(x)$.

Skoro różniczkowanie funkcji tworzącej odpowiada mnożeniu przez n , to pewnie dzieleniu przez n odpowiada całkowanie... Tak rzeczywiście jest. Funkcja tworząca ciąg $b_n = \frac{1}{n+1}a_n$ jest dana wzorem

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$$

Zadanie bonusowe: przelicz, że tak rzeczywiście jest.

gdzie $f(x)$ jest funkcją tworzącą ciąg (a_n) .

Problem 4: Kwadraty i sześciany

Korzystając z przesuwania indeksów, wyprowadź wzór na funkcje tworzące ciągów $b_n = n^2a_n$, $c_n = n^3a_n$ oraz $d_n = n(n-1)a_n$, w zależności od funkcji tworzącej ciąg (a_n) .

2.4 Iloczyn szeregów

Żałujemy, że $f(x)$ oraz $g(x)$ to funkcje tworzące odpowiednio (a_n) oraz (b_n) . Kontynuując nasze krzysiove eksperymenty, sprawdźmy co się stanie, gdy

wymnożymy $f(x)$ i $g(x)$:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + \dots) \cdot (b_0 + b_1x + \dots) &= \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots\end{aligned}$$

W takim razie, $f(x)g(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu (c_n) danego wzorem

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0,$$

który może wygląda trochę egzotycznie, ale jak się okaże za niedługo, pojawia się w naturze...

Na wykładzie z analizy mogło się to pojawić pod hasłem „mnożenie szeregów metodą Cauchy’ego” albo innym podobnym.

...choć pewnie dla większości jest ważniejsze, że pojawić się może na kolokwium.

Problem 5: Funkcja tworząca ciąg sum częściowych

Niech $f(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg (a_n) . Ustalmy stałą d i rozważamy ciąg $b_n = d^n$.

1. Zapisz jawnie wzór na funkcję tworzącą $g(x)$ ciągu (b_n) .
2. Funkcją tworzącą jakiego ciągu jest funkcja $f(x)g(x)$ dla f i g zdefiniowanych wyżej?
3. Korzystając z poprzedniego podpunktu, wyprowadź wzór na funkcję tworzącą ciąg $c_n = a_0 + \dots + a_n$.

3 Interludium: uogólniony symbol dwumianowy

Dla liczby rzeczywistej s i liczby naturalnej n definiujemy *uogólniony symbol dwumianowy* jako

$$\binom{s}{n} = \frac{s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-(n-1))}{n!}$$

Jeśli s jest liczbą naturalną, to $\binom{s}{n}$ zgadza się z symbolem Newtona znanym ze szkoły.

Przykład 3: Jawny wzór dla $s = \frac{1}{2}$.

Rozpiszmy czym konkretnie jest $\binom{\frac{1}{2}}{n}$:

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} - (n-1))}{n!} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (-\frac{2n-3}{2})}{n!} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!}.\end{aligned}$$

Wyrażenie $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)$ wygląda prawie jak silnia, więc wymuśmy, żeby silnia się pojawiła:

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-4)} \\ &= \frac{(2n-3)!}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (2 \cdot (n-2))} \\ &= \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}.\end{aligned}$$

Łącząc to z poprzednimi obliczeniami otrzymujemy:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!}{(n-2)!n!}$$

Nie jest to złe, ale możemy uzyskać bardziej estetyczny wzór. W tym celu zauważmy, że $\frac{(2n-3)!}{(n-2)!n!}$ wygląda prawie jak symbol dwumianowy $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$, więc wymuśmy sobie pojawienie się tego w powyższym wzorze:

$$\begin{aligned}\frac{(2n-3)!}{(n-2)!n!} &= \frac{(2n-3)! \cdot (2n-2) \cdot (2n-1) \cdot 2n}{n! \cdot (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{(2n-2) \cdot (2n-1) \cdot 2n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{n(n-1)}{4n(n-1)(2n-1)} \\ &= \frac{1}{4(2n-1)} \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

co w połączeniu z poprzednimi wzorami daje

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \cdot \frac{1}{4(2n-1)} \binom{2n}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n}.$$

Problem 6: Wybieranie n osób z grupy $-\frac{1}{2}$ osób.Rozpisz w podobny sposób $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$.*Po rozwiązaniu możesz skonsultować wynik z kartką wzorów na ostatniej stronie skryptu.*

Uogólniony współczynnik dwumianowy jest istotny, ponieważ pojawia się w rozwinięciu w szeregu potęgowy funkcji $(1+x)^s$, które wygląda tak:

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n.$$

***Zadanie mocno bonusowe:** wyprowadzić ten wzór, korzystając ze „wzoru”*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Dlaczego „wzoru” jest w cudzysłowie?

Problem 7: Rozwinięcie pierwiastka w szereg

Korzystając z wyprowadzonych wzorów na $\binom{\pm\frac{1}{2}}{n}$ napisz wzory na rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Użyj tych wzorów do znalezienia rozwinięć funkcji $\sqrt{1-4x}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Przypominajka dla mocno skacowanych zmęczonych:
 $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

Teraz jest doskonały moment na spojrzenie na ściągę ze wzorami na ostatniej stronie skryptu.

4 Znajdowanie funkcji tworzących

Przykład 4: Rekurencja liniowa

Rozważmy ciąg (a_n) spełniający rekurencję

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

oraz warunki początkowe $a_0 = 3, a_1 = 7$. Chcielibyśmy znaleźć funkcję tworzącą $f(x)$ ciągu (a_n) , najlepiej bez znajdowania najpierw jawnego (nierekurencyjnego) wzoru na ten ciąg.

W tym celu wyznaczmy funkcję tworzącą ciągu $b_n = 5a_{n+1} - 6a_n$ w zależności od $f(x)$. Wiemy, że funkcją tworzącą ciągu a_{n+1} jest $\frac{f(x)-a_0}{x} = \frac{f(x)-3}{x}$, w takim razie funkcją tworzącą $5a_{n+1} - 6a_n$ jest

$$5 \cdot \frac{f(x)-3}{x} - 6 \cdot f(x).$$

Z drugiej strony, $b_n = a_{n+2}$, więc funkcją tworzącą (b_n) jest

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1x}{x^2} = \frac{f(x) - 3 - 7x}{x^2}.$$

W takim razie, porównując oba wyniki, otrzymujemy zależność

$$5 \cdot \frac{f(x)-3}{x} - 6 \cdot f(x) = \frac{f(x)-3-7x}{x^2}$$

czyli, po przekształceniach...

$$f(x) = \frac{3-8x}{6x^2-5x+1}.$$

Tutaj korzystamy z rozwiązania Problemu 3.

...które należy wykonać (zadanie!)

Problem 8: Rekurencja liniowa v2

Wzorując się na powyższym przykładzie, znajdź funkcję tworzącą ciągu (a_n) zadanego przez rekurencję

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$$

oraz warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 3$.

Przykład 5: Ciąg Catalana

Ciąg liczb Catalana (c_n) spełnia warunek $c_0 = 1$ oraz rekurencję

$$c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \dots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0.$$

Niech $f(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg (c_n) . Postać rekurencji sugeruje, żeby spojrzeć na iloczyn $f(x) \cdot f(x)$:

$$f(x)^2 = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= c_0^2 + (c_0 c_1 + c_1 c_0) x + (c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) x^2 + \dots \\
&= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots \\
&= \frac{f(x) - c_0}{x}.
\end{aligned}$$

Gdzie do tej pory w skrypcie pojawiło się wyrażenie $\frac{f(x)-c_0}{x}$?

W takim razie, oznaczając $y := f(x)$ i korzystając z tego, że $c_0 = 1$ dostajemy równość

$$y^2 = \frac{y-1}{x},$$

co po uproszczeniu daje $xy^2 - y + 1 = 0$. To jest uczciwe równanie kwadratowe na y i po szybkim Δ -owaniu dostajemy

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Rozwiązanie ze znakiem $+$ odrzucamy, bo taki y jest (jako funkcja zmiennej x) malejący, a skoro ciąg (c_n) jest dodatni, to jego funkcja tworząca jest rosnąca. W takim razie

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Wprowadzenie y to tylko sztuczka psychologiczna.

Zadanie: Przekonaj samego siebie o tym, że dodatnie ciągi dają rosnące funkcje tworzące.

Problem 9: Spicy rekurencja

Znajdź funkcję tworzącą $f(x)$ ciągu (d_n) spełniającego rekurencję

$$d_{n+1} = 2^n d_0 + 2^{n-1} d_1 + \dots + 2d_{n-1} + d_n$$

oraz warunek początkowy $d_0 = 2$. **Wskazówka:** znajdź najpierw funkcję $g(x)$ (w postaci szeregu potęgowego) taką, że $f(x)g(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $e_n = 2^n d_0 + 2^{n-1} d_1 + \dots + 2d_{n-1} + d_n$.

Odruch Pawłowa do wyćwiczenia: jeśli gdzieś pojawia się suma postaci

$$\sum_{k=0}^n \cos(k) \text{ktos}(n-k)$$

to dobrze jest popatrzeć na iloczyn funkcji tworzących ciągów $\cos(n)$ oraz $\text{ktos}(n)$

5 Zastosowania

Problem 10: Rozwiązanie rekurencji liniowej

Będziemy chcieli znaleźć jawny wzór na ciąg z Przykładu 4.

1. Przypomnij sobie, że kiedyś na analizie męczono Cię rozkładem na ułamki proste. Korzystając z przywołanej z pamięci traumy, rozwiń funkcję $\frac{3-8x}{6x^2-5x+1}$ w szereg potęgowy.
2. Korzystając z rozwiązania poprzedniego podpunktu i definicji funkcji potęgowej, znajdź jawny wzór na ciąg z Przykładu 4.

Upředzając marudnych: tak, to można zrobić też przy pomocy równania charakterystycznego; ten przykład ma służyć głównie poćwiczeniu funkcji tworzących.

Problem 11: Wzór na liczby Catalana

Naszym celem jest wyznaczenie jawnego wzoru na liczby Catalana zdefiniowane w Przykładzie 5.

1. Korzystając ze swojego rozwiązania Problemu 7, rozwiń funkcję $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ w szereg potęgowy.
2. Przypomnij sobie co się działo w Przykładzie 5 oraz definicję funkcji tworzącej. Używając tego, znajdź jawny wzór na ciąg c_n .

Problem 12: Dowodzenie tożsamości v1

Będziemy chcieli udowodnić tożsamość $\binom{s}{n} + \binom{s}{n+1} = \binom{s+1}{n+1}$. W tym celu definiujemy ciągi $b_n = \binom{s+1}{n+1}$ oraz $c_n = \binom{s}{n} + \binom{s}{n+1}$.

1. Znajdź funkcję tworzącą (b_n) oraz (c_n) .
2. Przypatrz się uważnie swojej odpowiedzi w poprzednim podpunkcie i zauważ, że (b_n) oraz (c_n) mają tę samą funkcję tworzącą. Wywnioskuj stąd, że $b_n = c_n$.

Problem 13: Dowodzenie tożsamości v2

Będziemy chcieli udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}.$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, niech $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}$ oraz $c_n = \binom{s+t}{n}$.

1. Zapisz
2. Używając mnożenia szeregów, znajdź funkcję tworzącą ciągu (b_n) . **Wskazówka:** Najpierw bardzo dobrze przypatrz się wzorowi na ciąg odpowiadający iloczynowi funkcji tworzących. Jakie funkcje trzeba wstawić, żeby otrzymać w wyniku sumę $\sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}$?
3. Porównaj wyniki z dwóch poprzednich podpunktów i wywnioskuj, że $b_n = c_n$.

ŚCIAGA

Uogólniony symbol dwumianowy

$$\binom{s}{n} = \frac{s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-(n-1))}{n!}$$

szczególne przypadki: $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n}$ oraz $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$

Przydatne szeregi

$$1 + \heartsuit + \heartsuit^2 + \dots = \frac{1}{1 - \heartsuit}$$

$$(1 + \heartsuit)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \heartsuit^n$$

$$\sqrt{1-4\heartsuit} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \heartsuit^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4\heartsuit}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \heartsuit^n$$

Operacje na ciągach vs. operacje na funkcjach tworzących

Wzór ciągu	Funkcja tworząca
$a_n \pm b_n$	$f(x) \pm g(x)$
ca_n	$cf(x)$
$c^n a_n$	$f(cx)$
a_{n-1}	$xf(x)$
a_{n+1}	$\frac{f(x)-a_0}{x}$
na_n	$xf'(x)$
$\frac{1}{n+1}a_n$	$\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$
$a_n b_0 + \dots + a_0 b_n$	$f(x)g(x)$

Kilka szczególnych przypadków poprzedniej tabelki

Wzór ciągu	Funkcja tworząca
c^n	$\frac{1}{1-cx}$
$(-1)^n a_n$	$f(-x)$
$a_0 + a_1 + \dots + a_n$	$\frac{f(x)}{1-x}$