

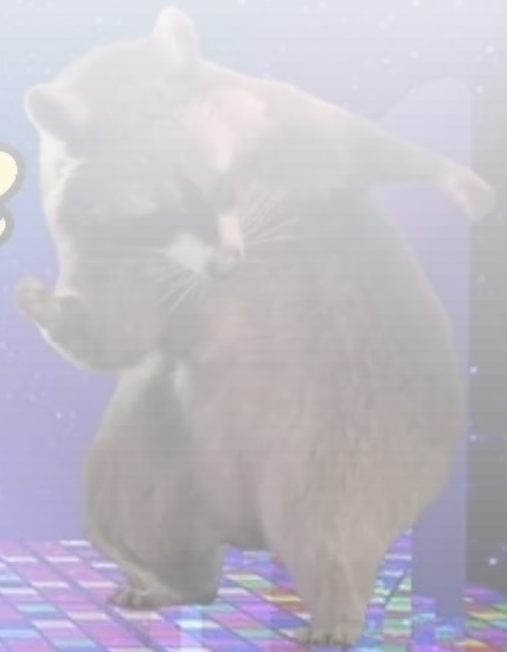
Te wszystkie liczby z nazwiskami

Poradnik dla zagubionych

יעקב גוגולוק

*from
breakdance*

@raccoon_motivation



to

breakdown

Wstęp

Skrypt przeprowadza przez te wszystkie nieszczęsne „liczby z nazwiskami”. Zadania są bazowane na Liście 7, z pewnymi dodatkami oraz modyfikacjami. Materiał dotyczący liczb Eulera nie jest i nie będzie obecny w skrypcie.

O formie skryptu

Osią skryptu są **Problemy** do samodzielnego rozwiązania, poprzeplatane krótkimi akapitami zawierającymi niezbędne definicje. Problemy są zazwyczaj rozbite na drobne kroki i **są absolutnie obowiązkowe do wykonania** jeśli ktoś chce dobrze opanować materiał.

Na marginesach są umieszczone dodatkowe zadania, które mają pomóc w oswojeniu się z materiałem, a także wskazówki, dodatkowe komentarze oraz bezowocne próby autora w byciu zabawnym.

Na końcu jest umieszczona lista odpowiedzi i komentarzy do zadań, do sprawdzenia poprawności swoich wyników **po rozwiązaniu zadania**.

Autor dziękuje Wiktorowi M. za sugestię dodania listy odpowiedzi.

Spis treści

Wstęp	2
1 Liczby Stirling drugiego rodzaju	3
2 Liczby Stirling pierwszego rodzaju	5
3 Liczby Bella	6
4 Potęgi kroczące	7
Odpowiedzi do zadań	8

1 Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Niech n, k będą ustalonymi liczbami naturalnymi. **Liczba Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ to liczba podziału n osób na k niepustych, rozłącznych druzyn.

Zaczynamy od liczb Stirlinga drugiego rodzaju, bo są odrobinę łatwiejsze w obsłudze, stąd ta mickiewiczowska kolejność rozdziałów.

Problem 1.1: Skrajne wartości

Przeczytaj na głos definicję liczb Stirlinga dla $k = 1$ i zastanów się ile wynosi $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ w tym przypadku. Powtórz to samo dla $k = n$, $k = n - 1$ oraz $k = 2$.

Problem 1.2: Rekurencja i funkcja tworząca

Oznaczmy $p_n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$, $q_n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$.

1. Ile wynosi p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 ?
2. Korzystając ze wzoru na p_n wyznaczonego w poprzednim Problemie, znajdź funkcję tworzącą.
3. Spróbuj wyrazić q_{n+1} przy pomocy p_n oraz q_n .
4. Korzystając z rekurencji wyprowadzonej w poprzednim punkcie, znajdź funkcję tworzącą ciągu q_n (w razie problemów, spójrz do poradnika o funkcjach tworzących).

Wskazówka do podpunktu 3: Danych jest n osób oraz Andrzej, których chcemy podzielić na trzy drużyny. Andrzej może być własną drużyną, albo nie. Liczba podziałów, gdzie Andrzej jest samemu wynosi (???). Jeśli Andrzej ma nie być samemu, to znaczy, że pozostałe n osób dzielimy na 3 drużyny i którejs podrzucamy Andrzeja.

Problem 1.3: Bajka rekurencyjna

Uzasadnij, że dla $n \geq k$ zachodzi tożsamość

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}.$$

Porównaj swój wynik z Problemem 1.2.

W razie problemów: Pomyśl znowu o Andrzeju ze wskazówki do Problemu 1.2. Podziel na drużyny najpierw n osób, a potem zrób coś z Andrzejem.

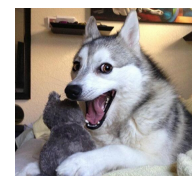
Problem 1.4: Bajkopisarstwo

Udowodnij kombinatorycznie (tj. historyjką) następującą tożsamość

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} \left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

Przypomnienie co to historyjka: Wykombinuj jakąś konfigurację - sadzanie n ludzi, dzielenie na grupy... - którą można zliczyć na dwa sposoby, tak żeby jeden sposób dawał wynik $k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ a drugi $\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} \left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$.

Przypomnienie jak to się robiło: Często zrozumienie, co zliczają pojedyncze wyrazy sumy pomaga wymyślić scenariusz, który należy zliczyć. Dla ustalonego j , co zlicza $\binom{n}{j}$? Co wtedy zlicza $\left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ i w konsekwencji $\binom{n}{j} \left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$? Co w takim razie zlicza $\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} \left\{ \begin{smallmatrix} n-j \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$? Czy potrafisz to samo zliczyć inaczej, tak żeby wyszło $k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$?



Odpowiedz najpierw na te pytania bez martwienia się o zakres j , a dopiero potem pokiwyj głową, że sensowne wartości j przebiegają taki, a nie inny dzięki przedział.

Problem 1.5: Funkcja tworząca I

Dla ustalonego n , niech $Q_n(x)$ oznacza funkcję tworzącą ciąg $\left\{ \binom{n}{0} \right\}, \left\{ \binom{n}{1} \right\}, \left\{ \binom{n}{2} \right\}, \dots$ czyli wielomian

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Wykaż, że

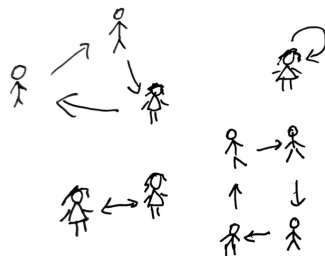
$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + xQ'_n(x),$$

na przykład korzystając z Problemu 1.3.

Quiz: dlaczego wielomian?

2 Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju

Liczba Stirlinga pierwszego rodzaju $[n_k]$ to liczba podziału n osób na k niepustych, rozłącznych *cykli*. Obrazowo, bierzemy grupę n osób i każemy im usiąść w rozłącznych kółeczkach na trawie. W obrębie kółek jest ważne tylko, kto kogo ma po prawej/lewej. Poniżej niewątpliwiej wartości artystycznej rysunek przykładowego podziału dla $n = 10$ oraz $k = 4$:



Problem 2.1: Skrajne wartości

Przeczytaj na głos definicję liczb Stirlinga pierwszego rodzaju dla $k = n$ i zastanów się ile wynosi $[n_k]$ w tym przypadku. Powtórz to samo dla $k = n - 1$.

Spróbuj sobie wyobrazić jak może wyglądać n osób rozsadzonych w $n - 1$ kółkach. Ile osób mogą liczyć pojedyncze kółka?

Problem 2.2: Zabawa na okrągło

Wylicz $[n_1]$, czyli na ile sposobów możemy usadzić n osób w jednym kółku.

Wskazówka: Ustalmy n osób, w tym Andrzeja. Każ Andrzejowi wybrać osobę po jego lewej. Może to zrobić na $n - 1$ sposobów. Teraz wybranej osobie każ wybrać osobę po jej lewej itd. itp.

Problem 2.3: Bajka rekurencyjna II

Uzasadnij, że dla $n \geq k$ zachodzi tożsamość

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Porównaj swój wynik z Problemem 1.2.

W razie problemów: Spójrz np. na wskazówkę do Problemu 1.2. Znowu, rozsądź najpierw n osób w kółeczkach, a potem zastanów się, co zrobić z Andrzejem.

Problem 2.4: Kuzyn sumy z Problemu 1.4

Udowodnij kombinatorycznie następującą tożsamość

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} (j-1)! \begin{bmatrix} n-j \\ k-1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Wzoruj się na swoim rozwiązaniu Problemu 1.4. Zauważ, że $(j-1)!$ jest liczbą sposobów, na które możemy ustalone j osób usadzić w kółku

Problem 2.5: Funkcja tworząca II

Dla ustalonego n , niech $P_n(x)$ oznacza funkcję tworzącą ciągu $[n_0], [n_1], [n_2], \dots$. Wykaż, że $P_{n+1}(x) = (x+n)P_n(x)$.

W razie trudności, spójrz na odpowiadające zadanie o liczbach Stirlinga drugiego rodzaju.

3 Liczby Bella

Liczba Bella b_n to liczba podziałów n osób na niepuste, rozłączne drużyny.

Problem 3.1: Pierwsze kontakty

1. Policz na palcach (tj. wypisując wszystkie podziały) $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 \dots$ aż Ci się znudzi.
2. Przypomnij sobie co to były liczby Stirling drugiego rodzaju. Jaka jest różnica w stosunku do liczb Bella? Wywnioskuj, że $\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = b_n$.

Problem 3.2: Rekurencja dzwonowa

Wykaż, że $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$.

Sugestia: Być może łatwiej będzie Ci pokazać, że $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} b_k$.

Wskazówka: Wykorzystaj Andrzeja, jak zwykle.

Zanim przejdziemy do następnego zadania, potrzebujemy jednego dodatkowego pojęcia. Pamiętamy* pojęcie funkcji tworzącej. Czasami zamiast rozważać funkcję tworzącą ciąg (a_n) wygodniej jest rozważyć funkcję tworzącą ciąg $b_n := \frac{1}{n!} a_n$. **Wykładniczą funkcją tworzącą ciąg (a_n)** nazywamy (zwyczajną) funkcję tworzącą ciąg (b_n) , czyli funkcję

*Autor się łudzi, że czytelnik pamięta.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Problem 3.3: Wprawka

Dojdź do wniosku, że skoro wykładnicza funkcja tworząca to funkcja tworząca lekko zmodyfikowanego ciągu, to nie ma co się martwić, że trzeba się czegoś nowego uczyć. Następnie wylicz wykładnicze funkcje tworzące następujących ciągów:

1. $a_n = n!$,
2. $a_n = 1$ (przy okazji odkryjesz etymologię nazwy „wykładnicza funkcja tworząca”),
3. $a_n = D_n =$ liczba nieporządków w S_n .

Uwaga: D_n pojawiło się liście 3. Tutaj wystarczy wiedzieć, że $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ oraz $D_0 = 1$.

Problem 3.4: Wykładnicza funkcja tworząca ciąg liczb Bella

Niech $B(x)$ będzie wykładniczą funkcją tworzącą ciąg liczb Bella. Pokaż, że

$$B'(x) = e^x \cdot B(x)$$

i wylicz z tego $B(x)$.

Wskazówka: Przypomnij sobie rozwinięcie e^x w szereg i jak się mnoży szeregi potęgowe, a następnie użyj Problemu 3.2, żeby zwinąć $e^x \cdot B(x)$. Do wyliczenia $B(x)$ oblicz pochodną funkcji $\ln B(x)$ (w tej chwili wygląda to jak wyciągnięte z kapelusza, po wykładzie z równań różniczkowych będzie to bardziej ludzkie).

4 Potęgi kroczące

Dla liczby naturalnej n oraz liczby rzeczywistej x definiujemy **potęgi kroczące** jako

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+(n-1))$$

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))$$

Wyrażenie $x^{\overline{n}}$ czytamy np. jako *iks do entej rosnacej*, a $x^{\underline{n}}$ jako *iks do entej malejacej*.

Problem 4.1: Rozgrzewka

1. Wylicz $2^{\overline{3}}$ oraz $7^{\underline{2}}$.
2. Sprawdź (przez rozpisanie obu stron), że $(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$.
3. Zapisz symbol dwumianowy $\binom{s}{n}$, korzystając z potęg kroczących.

Problem 4.2: Rachunek różnicowy

Wylicz, że $(x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}} = kx^{\underline{k-1}}$. Porównaj to ze wzorem na pochodną funkcji x^k .

Zauważ, że

$$f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x},$$

więc o wyrażeniu postaci $f(x+1) - f(x)$ można myśleć jak o „dyskretnej pochodnej f ”. Stąd nazwa „rachunek różnicowy” (nawiązująca do rachunku różniczkowego).

Problem 4.3: Wyrażanie potęg przez potęgi kroczące

1. Udowodnij tożsamość $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Korzystając z punktu drugiego Problemu 4.1 wyprowadź podobny wzór na $x^{\underline{n}}$.
2. Udowodnij tożsamość $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \{n\}_k x^{\overline{k}}$. Co dostaniesz, gdy za x podstawisz $-x$?

Wskazówka: Indukcja + Problem 2.3.

Wskazówka: Indukcja + Problem 2.3 + Problem 4.2 + trochę rachunków i wiara, że wyjdzie.

Uwaga: Problem 4.3 można rozwiązać na wiele sposobów, powyżej jest wskazówka do możliwie najbardziej chłopskorozumowego rozwiązania.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

Problem 1.1: $\{1\}^n = \{n\}^1 = 1$, $\{n-1\}^n = \binom{n}{2}$, a dla $n \geq 2$ mamy $\{2\}^n = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$. Oczywiście $\{0\}^2 = \{2\}^0 = 0$ (patrz też: Problem 1.2, pierwszy podpunkt).

Problem 1.2:

1. Odrobinię niezręcznie dzielić 2 osoby na 3 drużyny bez naruszania integralności tkanek rzeźzonych osób, stąd oczywiście $p_0 = p_1 = q_0 = q_1 = q_2 = 0$.
2. $\frac{x^2}{(1-x)(1-2x)}$.
3. $q_{n+1} = 3q_n + p_n$.
4. $\frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$.

Problem 1.4: Dzielimy grupę n osób na k drużyn, przy czym dodatkowo jedna drużyna zostaje wyróżniona.

Problem 2.1: $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$.

Problem 2.2: $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$.

Problem 2.3: Dzielimy $n+1$ ludzi na k drużyn. Z jednej strony jest to $\{k^{n+1}\}$. Z drugiej strony, wybierzmy z tej grupy jedną osobę $\mathbb{X}$. Liczba scenariuszy, w których $\mathbb{X}$ jest w jednosobowej drużynie, wynosi $\{k^{n-1}\}$; liczba pozostałych scenariuszy to $k\{k^n\}$.

Problem 2.4: Dzielimy grupę n osób na k drużyn, przy czym dodatkowo jedna drużyna zostaje wyróżniona.

Problem 3.1:

1. $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5, b_4 = 15$. Jeśli ktoś na tyle się nudził, że doliczył, że $b_5 = 52$, to może lepiej poczytać jakąś książkę, mogą polecić kilka powieści...
2. Liczby Stirlinga zliczają liczbę podziałów na ustaloną liczbę drużyn, liczby Bella zliczają wszystkie podziały.

Problem 3.2: Żeby podzielić $n+1$ osób na drużyny, wyróżniamy osobę $\mathbb{Y}$, a następnie:

1. ustalamy, że w jej drużynie **nie będzie** k osób (więc drużyna $\mathbb{Y}$ będzie miała $n-k$ osób poza $\mathbb{Y}$),
2. dobieramy $n-k$ osób do $\mathbb{Y}$,
3. pozostałe k osób dzielimy na drużyny.

Podliczając wszystkie sposoby otrzymujemy zależność $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$.

Problem 3.4: $B(x) = e^{e^x-1}$.

Problem 4.1:

1. $2^3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.
3. $\binom{s}{n} = \frac{s^n}{n!}$.

Problem 4.3:

1. $x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$.
2. $x^n = \sum_{k=0}^n \{k^n\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$.