

Lista 1

Przestrzenie noetherowskie

Zadanie 1. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. X jest przestrzenią noetherowską (tzn. każdy zstępujący łańcuch zbiorów domkniętych się stabilizuje).
2. Każda niepusta rodzina domkniętych podzbiorów X ma element minimalny (względem relacji inkluzji).

Sformułuj i udowodnij analogiczne warunki w terminach podzbiorów otwartych.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią noetherowską, to X jest quasi-zwarta, tzn. z każdego pokrycia otwartego X można wybrać podpokrycie skończone.

Zadanie 3. Pokaż, że jeśli X jest jednocześnie przestrzenią Hausdorffa i przestrzenią noetherowską, to X jest skończoną przestrzenią dyskretną.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli $Y \subseteq X$ to $\dim Y \leq \dim X$.

Zadanie 5. Podaj przykład noetherowskiej przestrzeni X o nieskończonym wymiarze.

Zadanie 6. Niech $Y \subseteq X$ będzie niepustym podzbiorem. Pokaż, że Y jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy domknięcie Y jest nierozkładalne.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli U jest niepustym otwartym podzbiorem przestrzeni nierozkładalnej X , to U jest gęsty w X .

Zadanie 8. Niech X będzie przestrzenią nierozkładalną o skończonym wymiarze i niech $Y \subsetneq X$ będzie właściwym podzbiorem domkniętym. Pokaż, że $\dim Y < \dim X$. Podaj przykład, że założenie o skończoności wymiaru X jest istotne.

Zadanie 9. Pokaż, że rozkład przestrzeni noetherowskiej na składowe nierozkładalne jest jednoznaczny (najpierw zdefiniuj dokładnie, co to znaczy).

Zadanie 10. Załóżmy, że $X = X_1 \cup X_2$, gdzie $X_1, X_2 \subseteq X$ są domknięte. Wykaż, że $\dim X = \max(\dim X_1, \dim X_2)$.