Lista 2
Afiniczna geometria algebraiczna I

W zadaniach (o ile nie zaznaczono inaczej) k **oznacza ciało algebraicznie domknięte.** Rozważamy tylko pierścienie przemienne z jedynką, a od homomorfizmów żądamy, żeby jedynki zachowywały.

Zadanie 1. *(Na rozgrzewkę)* Rozważmy odwzorowanie $f\colon k \to k^3$ dane wzorem $f(t) = (t, t^2, t^3)$. Pokaż, że obraz f jest afinicznym zbiorem algebraicznym.

Radykały

Przypomnijmy, że jeśli $I \trianglelefteq R$ jest ideałem, to definiujemy **radykał** I jako

$$\sqrt{I} := \left\{a \in R \mid \text{istnieje } n \in \mathbb{N} \text{ takie, że } a^n \in I\right\},$$

zaś ideał I nazywamy **radykalny** jeśli $I = \sqrt{I}$.

Zadanie 2. W tym zadaniu k jest dowolnym ciałem. Niech $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ i niech $f \in R$ będzie niestałym wielomianem.

1. Pokaż, że jeśli f jest bezkwadratowy (tzn. w rozkładzie f na czynniki nierozkładalne każdy czynnik jest w pierwszej potędze), to ideał (f) jest radykalny.
2. Opisz radykał ideału (f).

Zadanie 3. Pokaż, że ideał $I \trianglelefteq R$ jest radykalny wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień R/I jest **zredukowany** tj. nie posiada niezerowych elementów nilpotentnych.

Zadanie 4. Niech $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ i niech $I \triangleleft R$ będzie właściwym ideałem. Pokaż, że $\sqrt{I}$ jest równy przecięciu wszystkich ideałów **maksymalnych** $\mathfrak{m} \triangleleft R$ zawierających I. *Wskazówka:* myśl geometrycznie i pamiętaj o Nullstellensatz.

Zadanie 5. Pokaż, że radykał właściwego ideału $I \triangleleft R$ jest równy przecięciu wszystkich ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \triangleleft R$ zawierających I. *Wskazówka:* Może się przydać lemat Zorna.

Pierścień funkcji regularnych. Morfizmy

Niech $V \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem algebraicznym. Funkcję $f\colon V \to k$ nazywamy **regularną** jeśli istnieje wielomian $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ taki, że $f(a) = F(a)$ dla dowolnego $a \in V$. Zbiór wszystkich funkcji regularnych na V, który oznaczamy przez $\mathcal{O}(V)$, jest w naturalny sposób k-algebrą.

Zadanie 6. Niech $V \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem algebraicznym.

1. Udowodnij, że $\mathcal{O}(V)$ jest izomorficzne jako k-algebra z $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}_V$.
2. Jak można geometrycznie zinterpretować homomorfizmy k-algebr $\mathcal{O}(V) \to k$?
3. Jak zobaczyć na poziomie $\mathcal{O}(V)$ następujące własności: nierozkładalność V, skończoność V, V jest punktem?

Zadanie 7. Niech R będzie pierścieniem, $I \trianglelefteq R$ dowolnym ideałem, a $\pi\colon R \to R/I$ naturalnym przekształceniem ilorazowym. Pokaż, że poniższa odpowiedniość ideałów jest bijekcją:

$$\begin{array}{ccc} \left\{\text{ideały } \widetilde{J} \trianglelefteq R/I\right\} & \longleftrightarrow & \{\text{ideały } J \trianglelefteq R \text{ takie, że } J \supseteq I\} \\ \widetilde{J} & \longmapsto & \pi^{-1}\left(\widetilde{J}\right) \\ \pi(J) & \longleftarrow & J \end{array}$$

Pokaż, że w tej odpowiedniości ideały pierwsze (odpowiednio: maksymalne, radykalne) odpowiadają ideałom pierwszym (odpowiednio: maksymalnym, radykalnym).

Zadanie 8. Niech V będzie afinicznym zbiorem algebraicznym. Użyj poprzedniego zadania, żeby zinterpretować ideały pierścienia $\mathcal{O}(V)$ geometrycznie. Użyj tej intepretacji, żeby zdefiniować wymiar V odnosząc się jedynie do pierścienia $\mathcal{O}(V)$.

Niech $V \subseteq k^m, W \subseteq k^n$ będą afinicznymi zbiorami algebraicznymi. Mówimy, że $f\colon V \to W$ jest **morfizmem**, jeśli jest postaci

$$f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$$

dla pewnych $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(V)$. Jeśli $f\colon V \to W$ jest morfizmem, to definiujemy odwzorowanie $f^*\colon \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ wzorem

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

dla $\varphi \in \mathcal{O}(W)$. Odwzorowanie f^* nazywamy **homomorfizmem indukowanym przez f**.

Zadanie 9. Zauważ, że definicja f^* ma sens, tzn. że faktycznie $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(V)$ dla $\varphi \in \mathcal{O}(W)$, a f^* jest homomorfizmem k-algebr. Pokaż, że przy utożsamieniu $\mathcal{O}(V) \cong k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}_V$ odwzorowanie f^* odpowiada homomorfizmowi k-algebr $\widetilde{f}\colon k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}_W \to k[X_1, \dots, X_m]/\mathcal{I}_V$ zadanemu przez

$$\widetilde{f}\,(X_i + \mathcal{I}_W) = F_i + \mathcal{I}_V$$

gdzie F_i to dowolny wielomian reprezentujący f_i tzn. taki, że $f(a) = F(a)$ dla dowolnego $a \in V$ (najpierw pokaż, że $\widetilde{f}$ jest dobrze zdefiniowane).

Zadanie 10. Niech $f\colon V \to W$ będzie morfizmem afinicznych zbiorów algebraicznych.

1. Pokaż, że f ma gęsty obraz wtedy i tylko wtedy, gdy f^* jest różnowartościowe.
2. Pokaż, że f jest różnowartościowe gdy f^* jest „na", i że odwrotne stwierdzenie nie zachodzi.

Zadanie 11. Nadaj sens następującemu stwierdzeniu, a następnie je udowodnij: wybór skończenie wielu generatorów k-algebry $\mathcal{O}(V)$ odpowiada zanurzeniu V w przestrzeń afiniczną.

Zadanie 12. Niech V będzie afinicznym zbiorem algebraicznym. Pokaż, że $\mathcal{O}(V)$ jest zredukowaną (vide: Zadanie 3) skończenie generowaną k-algebrą i że każda zredukowana skończenie generowana k-algebra jest izomorficzna z $\mathcal{O}(V)$ dla pewnego V.

Zadanie 13. *(Kontynuacja Zadania 1)* Wskaż przykład morfizmu $f\colon V \to W$ (gdzie V, W są afinicznymi zbiorami algebraicznymi), którego obraz nie jest domknięty Zariskiego. Zauważ, że obraz f można przedstawić jako sumę skończenie wielu zbiorów postaci $X \setminus Y$, gdzie X, Y są domknięte Zariskiego. Dla $k = \mathbb{R}$ wskaż przykład morfizmu, którego obraz nie ma nawet tej własności.

Zadanie 14. Niech V będzie afinicznym zbiorem algebraicznym. Pokaż, że następujące warunki są równoważne.

1. V jest niespójne (jako przestrzeń topologiczna).
2. Istnieją $f, g \in \mathcal{O}(V)$ takie, że $f^2 = f, g^2 = g, fg = 0, f + g = 1$.

Sugestia: Dobrze zrozumieć czym (geometrycznie) powinny być f i g, na przykład zaczynając od rozważenia sytuacji, gdy V jest sumą dwóch rozłącznych prostych na płaszczyźnie.

Krzywe planarne

Zadanie 15. Pokaż, że płaszczyzna k^2 jest dwuwymiarowa, korzystając z poniższego planu.

1. Wskazując stosowny łańcuch, pokaż że $\dim k^2 \geq 2$.
2. Pokaż, że jeśli $F, G \in k[X, Y] \setminus k$ nie mają wspólnego (niestałego) dzielnika, to zbiór $V(F, G)$ jest skończony.
3. Udowodnij, że jeśli $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ jest łańcuchem ideałów pierwszych w $k[X, Y]$, to $\mathfrak{p}_0 = (0)$, $\mathfrak{p}_1$ jest generowany przez nierozkładalny wielomian, a $\mathfrak{p}_2$ jest maksymalny.
4. Wywnioskuj, że $\dim k^2 = 2$.

Krzywą planarną nazywamy domknięty podzbiór k^2, którego każda składowa ma wymiar 1.

Zadanie 16. Wywnioskuj z Zadania 15, że krzywe planarne to dokładnie zbiory zer niestałych wielomianów $f \in k[X, Y]$. Kiedy dwa niestałe wielomiany $f, g \in k[X, Y]$ zadają te same krzywe planarne? Opisz składowe $V(f)$.

Zadanie 17. Niech $C = V(X^2 - Y^3) \subseteq k^2$ i niech $f\colon k \to k^2$ będzie morfizmem $f(t) = (t^3, t^2)$. Sprawdź, że obrazem f jest krzywa C. Pokaż, że f jest bijektywnym morfizmem $k \to C$, który nie jest izomorfizmem. Pokaż, że f jest homeomorfizmem.