

Lista 3

Teoria modeli ciał algebraicznie domkniętych

W zadaniach (o ile nie zaznaczono inaczej) k oznacza ciało algebraicznie domknięte charakterystyki zero, a pojęcia typu, zbioru definiowalnego *et cetera* odnoszą się do teorii ACF i jej modeli.

Ogólności o ACF

Zadanie 1. Pokaż, że teoria ACF jest modelowo zupełna.

Zadanie 2. Zasada Lefschetza jest heurystyką mówiącą, że każde twierdzenie geometrii algebraicznej nad ciałem $\mathbb{C}$ powinno zachodzić we wszystkich ciałach algebraicznie domkniętych, być może z wykluczeniem niektórych ciał małej charakterystyki. Celem tego zadania jest pokazanie jednej z możliwych formalizacji tej zasady. Niech ϕ będzie zdaniem języka teorii pierścieni. Pokaż, że następujące warunki są równoważne.

1. $\text{ACF}_0 \models \phi$.
2. $\text{ACF}_p \models \phi$ dla dostatecznie dużych p .
3. $\text{ACF}_p \models \phi$ dla nieskończenie wielu p .

Zauważ, że $\overline{\mathbb{F}_p} \models \phi$ można zastąpić przez $\text{ACF}_p \models \phi$, a $\mathbb{C} \models \phi$ można zastąpić przez $\text{ACF}_0 \models \phi$.

Zadanie 3. Udowodnij następujący fakt (zwany niekiedy **twierdzenia Axa-Grothendiecka**): jeśli $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest różnowartościowym odwzorowaniem, to f jest bijekcją (!).

Zadanie 4. (*Ciała i eliminacja kwantyfikatorów*)

1. Pokaż, że w dowolnym ciele k (traktowanym jako $\mathcal{L}_{\text{rng}}$ -struktura w standardowy sposób) konstruowalne podzbiory k^n są dokładnie zbiorami definiowalnymi przy pomocy formuł bez kwantyfikatorów.
2. Udowodnij twierdzenie Chevalleya.
3. Wyjaśnij slogan „twierdzenie Chevalleya = eliminacja kwantyfikatorów w ACF”.
4. Podaj przykład ciała, którego $\mathcal{L}_{\text{rng}}$ -teoria k nie eliminuje kwantyfikatorów (w szczególności, naiwne sformułowanie twierdzenia Chevalleya nie zachodzi w k).
5. (*) Pokaż, że nieskończone ciało dopuszczające eliminację kwantyfikatorów w $\mathcal{L}_{\text{rng}}$ jest algebraicznie domknięte. *Ostrzeżenie:* Istnieje ryzyko, że to zadanie jest niewykonalne przy pomocy narzędzi, które pojawiły się dotychczas na wykładzie. Za jakiś czas (po omówieniu teorii ω -stabilnych) będzie za to w stanie udowodnić ogólniejsze stwierdzenie.

Zadanie 5. Pokaż, że zbiór definiowalny V ma wymiar $\geq n + 1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją rozłączne zbiory definiowalne $V_1, V_2, \dots \subseteq V$, każdy o wymiarze $\geq n$.

Typy w ACF

Zadanie 6. Niech $V, W \subseteq k^n$ będą k_0 -rozmaitościami takimi, że $p_{V,k_0} = p_{W,k_0}$. Pokaż, że $V = W$.

Zadanie 7. Niech $a \in k^n$ i niech $p = \text{tp}(a/k_0)$. Z wykładu wiemy, że istnieje k_0 -rozmaitość V taka, że $p = p_{V,k_0}$. Opisz V wprost, tzn. odwołując się wprost do punktu a .

Zadanie 8. Opisz topologię Stone'a na przestrzeni typów $S_n(k)$. Jaki jest związek tej topologii z geometrią?

Zadanie 9. Pokaż, że wymiar typu $p \in S_n(k_0)$ jest równy największej liczbie k , dla której istnieje łańcuch typów zupełnych $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots \subseteq p_m$ gdzie $p_0 = p$ oraz dla każdego $i = 0, \dots, m-1$ rozszerzenie $p_i \subseteq p_{i+1}$ forkuje.

Walka z urojeniami

Zadanie 10. Załóżmy, że T jest teorią zupełną. Pokaż, że T eliminuje elementy urojone wtedy i tylko wtedy, gdy pewien model T eliminuje elementy urojone.

Zadanie 11. Ustalmy liczbę naturalną n . Pokaż, że w dowolnej strukturze M można traktować zbiory mocy n jako klasy równoważności pewnej definiowalnej relacji równoważności E_n na M^n . W sytuacji gdy $M \models \text{ACF}$ podaj przepis na wyeliminowanie E , tzn. znajdź definiowalną funkcję $f: M^n \rightarrow M^k$, której włókna to dokładnie klasy równoważności E .

Zadanie 12. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem, niech T będzie $\mathcal{L}$ -teorią i załóżmy, że $\mathcal{L}$ posiada przynajmniej dwa symbole stałych c_1, c_2 takie, że $T \models c_1 \neq c_2$. Pokaż, że T eliminuje elementy urojone wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór definiowalny w (modelu teorii) T posiada kod.

Zadanie 13. (*Dobry powód, żeby eliminować elementy urojone*) Wprowadźmy następującą lokalną definicję: mówimy, że T **definiuje cięcia** jeśli każda definiowalna surjekcja $f: X \rightarrow Y$ posiada cięcie, tj. istnieje definiowalne odwzorowanie $g: Y \rightarrow X$ takie, że $f \circ g = \text{id}_Y$.¹

1. Pokaż, że jeśli T definiuje cięcia, to T eliminuje elementy urojone.
2. Pokaż, że ACF nie definiuje cięć (w szczególności, twierdzenie odwrotne do podpunktu 1. nie zachodzi).

Zadanie 14. Niech T będzie $\mathcal{L}$ -teorią i niech M będzie ω -nasyconym modelem T . Ustalmy zbiór definiowalny X w M i krotkę $\bar{c} \in M$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne.

1. $\bar{c}$ jest kanonicznym parametrem X
2. Istnieje $\mathcal{L}$ -formuła $\phi(x, y)$ taka, że $X = \phi(M, \bar{c})$ oraz dla dowolnego $\bar{c}' \neq \bar{c}$ zachodzi $X \neq \phi(M, \bar{c}')$.

Zadanie 15. Niech V będzie afinicznym zbiorem algebraicznym.

1. Niech $K \subseteq L \subset M$ wieżą ciał. Pokaż, że jeśli M jest skończenie generowanym rozszerzeniem K , to L też jest skończenie generowanym rozszerzeniem K .
2. Pokaż wprost (tzn. bez odwoływania się do jawnej konstrukcji k_V), że ciało definicji V jest skończenie generowanym rozszerzeniem $\mathbb{Q}$.

Zadanie 16. Pokaż, że każdy zbiór definiowalny w ACF_0 posiada kod.

¹Teoria ciała uporządkowanego $\mathbb{R}$ definiuje cięcia. Ogólniej: teorie o-minimalne definiują cięcia.