

Lista 4

Algebra różniczkowa

W poniższych zadaniach K jest ciałem różniczkowym charakterystyki zero, a dla $f \in K\{X\}$ oznaczamy przez $\langle f \rangle$ ideał różniczkowy generowany przez f .

Zadanie 1. Ustalamy $f \in K\{X\} \setminus K$. Definiujemy **separant** f jako

$$s_f = \frac{\partial f}{\partial X^{(n)}}$$

gdzie $n = \text{ord } f$.

1. Pokaż, że dla dowolnego $k \geq 1$ mamy $f^{(k)} = s_f X^{(n+k)} + f_k$ dla pewnego f_k rzędu mniejszego niż $n + k$.
2. Pokaż, że dla dowolnego $g \in K\{X\}$ istnieją $m < \omega$ oraz $g_0 \in K\{X\}$ takie, że

$$s_f^m g \equiv g_0 \pmod{\langle f \rangle}$$

oraz $\text{ord } g_0 \leq n$.

Zadanie 2. Pokaż, że jeśli $f \in K\{X\}$ jest nierozkładalny, a $g \in \langle f \rangle \setminus \{0\}$, to

1. $\text{ord } g \geq \text{ord } f$;
2. jeśli $\text{ord } g = \text{ord } f$, to f dzieli g .

Zadanie 3. Niech R będzie pierścieniem różniczkowym takim, że $\mathbb{Q} \subseteq R$. Pokaż, że jeśli I jest ideałem różniczkowym w R , to $\sqrt{I}$ też jest ideałem różniczkowym.

Dla niezerowego $f \in K\{X\}$ definiujemy

$$I(f) = \{g \in K\{X\} \mid s_f^m g \in \langle f \rangle \text{ dla pewnego } m < \omega\}.$$

Zadanie 4. Pokaż, że $I(f)$ jest ideałem

1. różniczkowym;
2. pierwszym, o ile f jest nierozkładalny.

Zadanie 5. Pokaż, że dowolny niezerowy różniczkowy ideał pierwszy w pierścieniu $K\{X\}$ jest postaci $I(f)$ dla pewnego nierozkładalnego $f \in K\{X\}$.

Zadanie 6. Niech $K \models \text{DCF}_0$. Pokaż, że $|S_1(K)| = |K|$. Wywnioskuj stąd, że dla dowolnego $K \models \text{DCF}_0$ oraz $n < \omega$ mamy $|S_n(K)| = |K|$.