

## Lista 5

### Ogólności o randze Morleya

W poniższych zadaniach  $T$  jest teorią zupełną w języku  $\mathcal{L}$ ,  $\mathfrak{C} \models T$  jest modelem monstrem, a  $\text{RM}$  oznacza rangę Morleya liczoną w  $\mathfrak{C}$ . Przez rangę Morleya formuły  $\phi$  mamy na myśli rangę Morleya zbioru realizacji  $\phi$ .

**Zadanie 1.** Pokaż, że w ACF ranga Morleya jest równa wymiarowi Krulla.

**Zadanie 2.** Niech  $(\mathfrak{C}, <)$  będzie gęstym porządkiem liniowym bez końców. Pokaż, że jeśli  $X \subseteq \mathfrak{C}$  niepustym przedziałem otwartym, to  $X$  nie ma rangi (Morleya).

**Zadanie 3.** Niech  $X, Y \subseteq \mathfrak{C}^n$  będą zbiorami definiowalnymi. Pokaż, że

$$\text{RM}(X \cup Y) = \max\{\text{RM}(X), \text{RM}(Y)\}.$$

**Zadanie 4.** Niech  $X, Y$  będą zbiorami definiowalnymi, a  $f: X \rightarrow Y$  definiowalną bijekcją. Pokaż, że  $\text{RM}(X) = \text{RM}(Y)$ .

**Zadanie 5.** Niech  $X$  będzie zbiorem definiowalnym rangi  $\text{RM}(X) = \alpha < \infty$ . **Stopniem Morleya** nazywamy największą liczbę  $d < \omega$  taką, że  $X = X_1 \cup \dots \cup X_d$  dla pewnych rozłącznych  $X_1, \dots, X_d$  rangi  $\alpha$  (w tej sytuacji zbiory  $X_1, \dots, X_d$  nazywamy **składowymi**  $X$ ). Stopień Morleya  $X$  oznaczamy przez  $\text{MD}(X)$ .

1. Pokaż, że stopień Morleya jest dobrze określony.
2. Pokaż, że składowe  $X$  są jednoznacznie wyznaczone *modulo*  $\alpha$ . Tu mówimy, że zbiory  $U, V$  są **równe modulo**  $\alpha$  jeśli różnica symetryczna  $U \Delta V$  ma rangę mniejszą niż  $\alpha$ .
3. Załóżmy, że  $X, Y \subseteq \mathfrak{C}^n$  są rozłącznymi zbiorami i  $\text{RM}(X), \text{RM}(Y) < \infty$ . Wyraż  $\text{MD}(X \cup Y)$  w terminach  $\text{MD}(X), \text{MD}(Y)$ .

**Zadanie 6.** Niech  $p$  będzie typem zupełnym nad zbiorem  $A \subseteq \mathfrak{C}$ . **Rangą Morleya**  $p$  nazywamy

$$\text{RM}(p) = \min\{\text{RM}(\phi) \mid \phi \in p\} \in \mathbf{On} \cup \{\infty\}$$

i mówimy, że  $p$  **ma rangę** jeśli  $\text{RM}(p) < \infty$ . Załóżmy, że  $p$  ma rangę  $\alpha < \infty$  i wybierzmy  $\phi_p \in p$  takie, że  $\text{RM}(\phi_p) = \alpha$  oraz

$$\text{MD}(\phi_p) = \min\{\text{MD}(\phi) \mid \phi \in p, \text{RM}(\phi) = \alpha\}.$$

**Stopniem Morleya**  $p$  nazywamy liczbę  $\text{MD}(\phi_p)$ .

1. Pokaż, że  $\phi$  jest jednoznacznie wyznaczone modulo  $\alpha$  przez  $p$ .
2. Pokaż, że jeśli  $p, q$  są typami zupełnymi nad  $A$  mającymi rangę oraz  $\phi_p = \phi_q$ , to  $p = q$ . Więcej: opisz jak odtworzyć  $p$  znając tylko  $\phi_p$ .

**Zadanie 7.** Rozważmy następujące możliwe własności  $T$ .

1. **Całkowita przestępnosc.** Każdy definiowalny zbiór w  $\mathfrak{C}$  ma rangę Morleya.
2.  **$\omega$ -stabilność.** Dla dowolnego przeliczalnego  $A \subseteq \mathfrak{C}$  istnieje jedynie przeliczalnie wiele typów zupełnych nad  $A$ .

Pokaż, że 2) implikuje 1), a jeśli język  $\mathcal{L}$  jest przeliczalny, to również 1) implikuje 2). Pokaż, że założenie o przeliczalności  $\mathcal{L}$  jest istotne. Wywnioskuj, że każdy zbiór definiowalny w  $\text{DCF}_0$  ma rangę.