

Lista 6

Prolongacje

Pracujemy w dużym ciele różniczkowo domkniętym $(\mathcal{U}, \delta) \models \text{DCF}_0$. Ciało stałych $\mathcal{U}$ oznaczamy przez $\mathcal{C}$.

Zadanie 1. Pokazać, że modele DCF_0 to dokładnie te ciała różniczkowe K charakterystyki zero, które są **egzystencjalnie domknięte**, tzn. dla dowolnego układu równań i nierówności ($\neq$) różniczkowych Σ o współczynnikach z K jeśli Σ ma rozwiązanie w pewnym rozszerzeniu różniczkowym L/K , to Σ ma rozwiązanie w K .

Zadanie 2. Niech $V \subseteq \mathcal{U}^n$ będzie zbiorem afinicznym.

1. Niech $D: \mathcal{U}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{U}[X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n]$ będzie (jedynym) różniczkowaniem, które zgadza się z δ na $\mathcal{U}$ i takie, że $D(X_i) = X'_i$. Znaleźć jawny wzór na $D(f)$ dla $f \in \mathcal{U}[X_1, \dots, X_n]$.
2. Definiujemy **prolongację** V jako zbiór afinicznych $\tau V \subseteq \mathcal{U}^n \times \mathcal{U}^n$ zadany przez zbiór wielomianów $I \cup D(I) \subseteq \mathcal{U}[X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n]$, gdzie I jest ideałem V . Zauważyć, że rzut τV na pierwsze n współrzędnych zawiera się w V , w szczególności można myśleć o τV jako o „wiązce” $\pi: \tau V \rightarrow V$.
3. Pokazać, że jeśli $a \in V$, to $(a, \delta(a)) \in \tau V$.

Zadanie 3. Pokazać, że regularne (tzn. wielomianowe) cięcie s wiązki $\pi\tau V \rightarrow V$ odpowiada zadaniu na $\mathcal{O}(X)$ różniczkowania δ_s , które zgadza się z δ na $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(V)$. Jawnie opisać tę odpowiedniość.