TOPOSY

Formalności:

1) Zaliczenie: referat + notatki
(80%?) (20%?)

2) Literatura: i) S. Maclane, J. Moerdijk
„Sheaves in Geometry and Logic"
ii) P. T. Johnstone
„Sketches of an Elephant"

główny tekst

poboczny tekst / kompendium

Topos

B

Geometria (algebraiczna)
&
topologia (alg.)

A

[Logika / teoria mnogości / „podstawy matematyki"]

A Topos =

istnieje pewien obiekt Ω
{podobiekty}
inaczej: Ω

Po co? (ś'63)

Jeśli za C
„kategorię sz
to różne t
obiekty
„geome
np. „prze

Ⓐ Topos = kategoria „podobna" do kategorii zbiorów **Sets**

i) pojęcie podzbioru (podobiekt tzn. monomorfizm $A \hookrightarrow X$)

ii) podzbiory X ⟷ funkcje $X \to \{0,1\}$

$X \supseteq A \longmapsto \chi_A : X \to \{0,1\}$

$X \supseteq \chi^{-1}(0) \longleftarrow \chi$

istnieje pewien obiekt Ω taki, że (tzn. $\Omega = \{0,1\}$)

$\{\text{podobiekty } X\} \longleftrightarrow \{\text{morfizmy } X \to \Omega\}$

inaczej: Ω „klasyfikuje podobiekty"

Sets: injekcja = monomorfizm $A \hookrightarrow X$

iii) istnieje $X \times Y$ itd...

iv) zbiór potęgowy (ii)

$P(X) \simeq \{\text{podobiekty}\}$, można traktować $P(X)$ jako element kategorii)

Po co? (~'63) Lawvere–Tierney: w toposie $\mathcal{C}$ można „uprawiać matematykę"

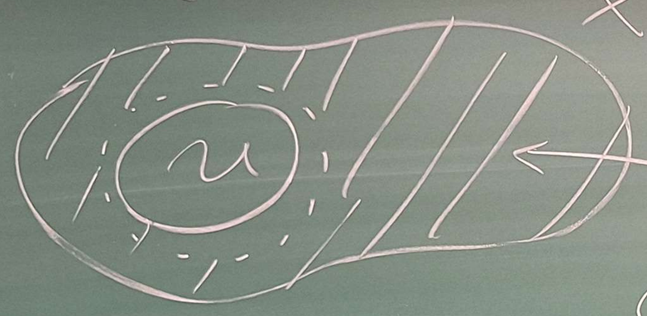
↳ np. teorię grup: rozważyć „obiekt grupowy w $\mathcal{C}$"

$G \in Ob(\mathcal{C})$, $m : G \times G \to G$ która spełnia pewne aksjomaty.

Jeśli za $\mathcal{C}$ weźmiemy „kategorię snopów" nad ust. top. X to różne klasyczne matematyczne obiekty w $\mathcal{C}$ odpowiadają „geometrycznym" strukturę nad X,

W $Open(X)$ mamy $\emptyset$, X, $\cap$, $\cup$
„0", „1", „1", „V"

Co z $\neg$?



$Int(X|U) =: \neg U$

w $\mathbb{R}$: $U = (0,1) \cup (1,2)$
$\neg U = (-\infty,0) \cup (2,\infty)$
$\neg\neg U = (0,2)$

$\neg\neg\varphi \equiv \neg\varphi$

$\mathcal{C}$ = snopy na X
$\Omega \approx Open(X)$

φ zachodzi na U
φ ma wartość boolowską $\geq U$

$\neg\neg\varphi$ zachodzi na U
$\equiv$
φ zachodzi na gęstym podzb. U
(w $Int(U)$)

Dlaczego?: wartości logiczne zdań w logice (internalnej) $\mathcal{E}$ przyjmują wartości w $\mathcal{R}$.

[Sets logika = logika klasyczna ~~> $\{0,1\}$ - wartościowa]

(~> algebra Boole'a mamy $\neg$)

Ogólniej: $\mathcal{R}$ jest tylko algebrą Heytinga ($\neg\neg p \neq p$)

Naturalny przykład: X - p. topologiczna

$Open(X) = \{U \subseteq X \mid U$ - otw.$\}$.

---

toposie można rozumować:

1) Weź ulubione tw. φ z Alg. Lin. 2 $\mathcal{R}$ ← [Sets] w stosownym języku
2) Przepisz dowód φ na dostatecznie abstrakcyjny/kategoryjny
3) „Powtórz dowód" w $\mathcal{E}$ [$\mathcal{E}$]
4) Dostań tw. $\tilde{\varphi}$ o $\mathcal{R}$ w $\mathcal{E}$

$\mathcal{O}pen(X) = \{U \subseteq X \mid U - \text{otw.}\}$.

W toposie można rozumować:

1) Weź ulubione tw. $\xleftarrow{\varphi}$ z Alg. Lin. $2\mathbb{R}$ ↖ [Sets] w stosownym języku
2) Przepisz dowód φ na dostatecznie abstrakcyjny/kategoryjny
3) Powtórz „dowód" w $\mathcal{E}$ [$\mathcal{E}$]
4) Dostań tw. $\tilde{\varphi}$ o „p. wektorowych w $\mathcal{E}$"
5) Przetłumacz $\tilde{\varphi}$ na „klasyczną matematykę"

Ograniczenie: dowód φ musi być „intuicjonistyczny"
$\approx$ nie używamy prawa wyłączonego środka
$p \vee \neg p$

Ⓑ Topos = „uogólniona przestrzeń"
¿topologiczna?

X - p. topologiczna

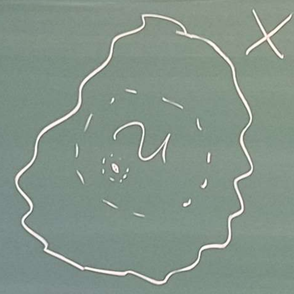
1] Open(X) jest za mały na bycie toposem. (brak $\mathbb{R}$)

kategoria!

$U, V \in \mathrm{Open}(X)$

$\mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \{\cdot\} & U \subseteq V \\ \emptyset & \text{w p.p.} \end{cases}$

$U \subseteq V \rightsquigarrow U \to V$



U jest „lokalnie homeomorficzne z X"

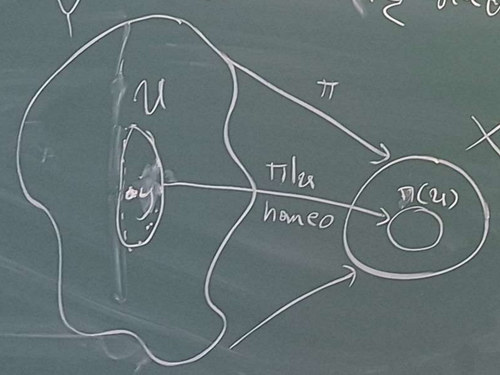
$\pi : U \hookrightarrow X$

$x \longmapsto x$

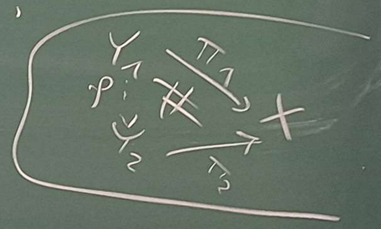
Pomysł: rozszerzmy Open(X) o wszystkie przestrzenie lokalnie homeomorficzne z X;

Def. Y - p. top, $\pi : Y \to X$ ciągłe, otw. Para (Y, π) jest przestrzenią étalną nad X, jeśli:

(1c)



$\forall y \exists U \ni y$ $\pi|_U$ jest homeo. na swój obraz.



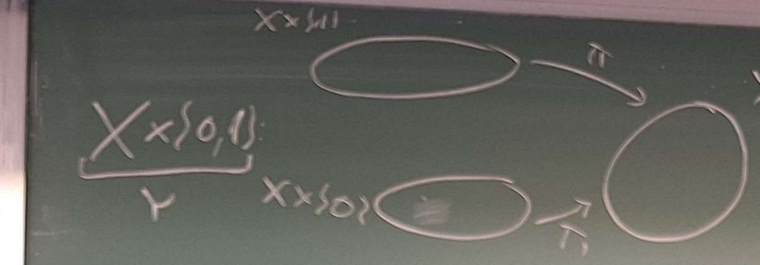
Fw.

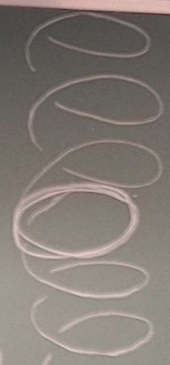
Kategoria jest

W do

Jak to

Set





$X = S^1$

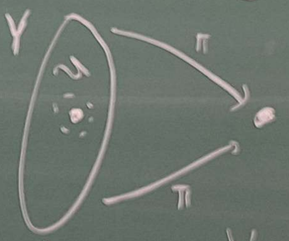


Tw. Kategoria p. étalnych nad X jest toposem.

W dobrze zdef. sensie ta kategoria pozwala odtworzyć X.

Jak to ma się do Sets?

Sets $\hookrightarrow$ przestrzenie étalne nad $*$ (przestrzeń z jednym punktem)



Suj. różne $\pi(y) = *$

(c) $\rightsquigarrow$ Y jest p. dyskretne!