Def: Kategoria $\mathcal{C}$ jest to zestaw danych następującego typu:

1) Klasa: $Ob(\mathcal{C})$ ← obiekty/elementy

2) Dla $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ klasa $Hom(X,Y)$ ← morfizmy z X do Y

   • Jeśli $(X,Y) \neq (X',Y')$ to $Hom(X,Y) \cap Hom(X',Y') = \emptyset$

3) Dla $X \in Ob(\mathcal{C})$ wyróżniony element $id_X \in Hom(X,X)$ ← Identyczność na X

4) Dla $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ operacja:

$$\circ : Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) \longrightarrow Hom(X,Z)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

t.że:

i) $id_Y \circ f = f = f \circ id_X$, dla $f \in Hom(X,Y)$

ii) dla $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Def: • Kategoria $\mathcal{C}$ jest <u>lokalnie mała</u> gdy dla każdych $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ $Hom(X,Y)$ jest zbiorem

• Kategoria $\mathcal{C}$ jest <u>mała</u> jeśli jest <u>lokalnie mała</u> oraz $Ob(\mathcal{C})$ jest zbiorem

Przykłady: 1) **Set / Sets** (Kategoria zbiorów)

• $Ob(Set)$ - zbiory
• $Hom(X,Y) = \{$funkcje $X \to Y\}$
• $\circ$ - składanie funkcji
• id_X

2) **Rel** (Kategoria relacji)

• $Ob(Rel)$ - wszystkie zbiory
• $Hom(X,Y) = \{$relacje między X a $Y\}$
• $\circ$ - składanie relacji
• id_X - standardowa relacja równości

3) **Grp** / Grps (Kategoria grup)

• $Ob(Grp)$ - grupy
• $Hom(G,G') = \{$homomorfizmy $(G,\cdot) \to (G',\cdot')\}$
• $\circ$ - składanie homomorfizmów
• id_G

4) **Ab** (kategoria grup abelowych)

• $Ob(Ab)$ - grupy abelowe
• $Hom(G,G') = \{$homomorfizmy $(G,\cdot) \to (G',\cdot')\}$
• $\circ$ - składanie homomorfizmów
• id_G

5) $Vect_{\mathbb{K}}$ (kategoria prz. lin // $\mathbb{K}$)

- $Ob(Vect_{\mathbb{K}})$ - prz. lin // $\mathbb{K}$
- $Hom(V,W) = \{$przekształcenia liniowe $V \to W\}$
- $\circ$ - składanie przekształceń liniowych
- id_V

6) Top (kategoria p. topologicznych)

- $Ob(Top) =$ p. top.
- $Hom(V,W) = \{$funkcje ciągłe $V \to W\}$
- $\circ$ - złożenie fcji ciągłych
- id_V

7) Δ (kategoria symplicjalna)

- $Ob(\Delta) = \{[n] : n < \omega\}$, $[n] = \{0, \dots, n-1\}$
- $Hom([m],[n]) = \{f : [m] \to [n] \mid f$ - niemalejąca$\}$
- $\circ$ - składanie funkcji
- $id_{[n]}$

8) BG. Niech $(G,\cdot)$ - grupa. Wtedy:

- $Ob(BG) = \{*\}$ (ob. jednoelementowy)
- $Hom(*,*) = G$ (el. grupy G to morfizmy)
- $\circ$ - składanie gdy $\in$ g·h
- $id_* =$ el. neut. grupy e_G

9) poset jako kategoria. Niech $(X, \leq)$ - poset (zb. częściowo uporządkowany)

(Coś do diagram Hasse'go)

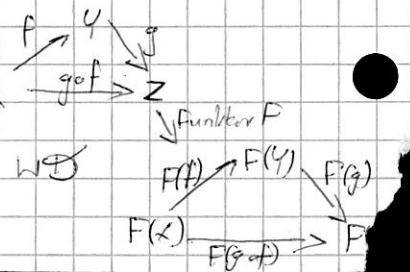
- $Ob(\mathcal{C}) = X$
- $Hom(a,b) = \begin{cases} \{f_{a,b}\}, & \text{jeśli } a \leq b \\ \emptyset & \text{w.p.p} \end{cases}$
- Składanie: ~~Jeśli istnieją $f_{x,y}$ oraz $f_{y,z}$ to zachodzi, że $x \leq y$ oraz $y \leq z$~~
  $\circ: f_{b,c} \circ f_{a,b} = f_{a,c}$ (Oczywiście $a \leq b$ i $b \leq c$, wtedy $a \leq c$)
- $id_a = f_{a,a}$ (zwrotność)

Def: Niech $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ - kategorie. Funktor (kowariantny) z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ składa się z następujących danych:

1) dla $X \in Ob(\mathcal{C})$ przyporządkowuje pewien obiekt $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$
2) dla $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$: $F_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$,
   $f \mapsto F(f)$

   takie, że

   i) $F(id_X) = id_{F(X)}$
   ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$



Notacja: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (strzałka ciągła)

Przykłady 1) Funktor identycznościowy. $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

- $X \in \mathcal{C}$ to $F(X) = X$ $\quad (F_{Ob(\mathcal{C})} = id_{Ob(\mathcal{C})})$
- $f \in Hom(X,Y)$ to $F(f) = f$ $\quad (F_{X,Y} = id_{Hom(X,Y)})$

2) Funktory zapominania np.

- $F: Grp \to Set$

  $F((G,\cdot)) = G$
  $F(f) = f$ (zapomina o tym, że to homomorfizm)

- $F: Top \to Set$

  $F((X,\tau)) = X$
  $F(f) = f$

3) Funktory zanurzania

- $F: Ab \to Grp$

  $F((G,\cdot)) = (G,\cdot)$
  $F(f) = f$

- $F: Set \to Rel$

  $F(X) = X$
  $F(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ ← relacja

4) $F: Set \to Top$

$F(X) = (X,$ top. dyskretna na $X)$
$F(f) = f$ ← ciągła (bo top. dyskretna)

5) Niech $\mathcal{C}$ - lokalnie mała kategoria, $A \in Ob(\mathcal{C})$.

$h_A: \mathcal{C} \to Set$

$h_A(X) = Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$ ← zbiór bo $\mathcal{C}$ lok. mała

$(h_A)_{X,Y}: Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{Set}(h_A(X), h_A(Y))$

$f \longmapsto h_A(f)$

$h_A(f): h_A(X) \to h_A(Y)$

$h_A(f): Hom_{\mathcal{C}}(A,X) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,Y)$

$(A \xrightarrow{g} X) \longmapsto (A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y)$, $f \circ g$

tzn. $h_A(f)(g) = f \circ g$

Def: Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wtedy $\mathcal{C}^{op}$ jest kategorią odwrotną, gdzie:

1) $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
2) Dla $X,Y \in Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$: $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$
3) Dla $X \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ wyróżniamy element $id_X^{op} \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,X)$
4) Jeśli $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$ $\Rightarrow$ $f \in Hom(Y,X)$, $g \in Hom(Z,Y)$. Wtedy $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ f$

Def: Funktor kontrawariantny z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ to funktor (kowariantny) $F: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

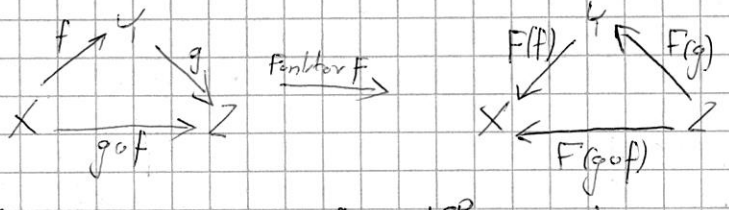
Czyli możemy to powiedzieć (tak o tym myślimy)

1) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ to $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$

2) jeśli $f: X \to Y$ ($Ob(\mathcal{C})$, $Ob(\mathcal{C})$) to $F(f): F(Y) \to F(X)$,

t.że dla $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ($w \mathcal{C}$) mamy: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

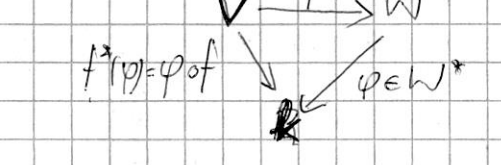
- $F(id_X) = id_{F(X)}$ ($w \mathcal{D}$)



Przykłady 1) Funktor sprzężenia $(-)^*: Vect_k \to Vect_k$

- $V \in Ob(Vect_k)$ to $V^* = Hom_{Vect_k}(V, k)$ (przy funkcjonałach liniowych)
- $Hom(V,W) \ni f \longmapsto f^* \in Hom(W^*, V^*)$

$(f: V \to W) \rightsquigarrow (f^*: W^* \to V^*)$



2) $F: Top^{op} \to Set$

- $X \in Ob(Top)$ to $F(X) = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U}$ - domknięty w $X\}$
- $f: X \to Y$ ciągła to $F(f): \{$domknięty w $Y\} \to \{$domknięty w $X\}$

$\mathcal{U} \longmapsto f^{-1}(\mathcal{U})$

$F(f)(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U})$

Zatem $F(g \circ f)(\mathcal{U}) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = (f^{-1} \circ g^{-1})(\mathcal{U}) = (F(f) \circ F(g))(\mathcal{U})$ ✓

($g: Y \to Z$, $f: X \to Y$)

Uogólnienie 3) Niech $\mathcal{C}$ lok. mała kategoria oraz $A \in Ob(\mathcal{C})$.

$h^A: \mathcal{C}^{op} \to Sets$

$h^A(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$

$(h^A)_{X,Y}: Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{Set}(h^A(Y), h^A(X))$

$h^A(f)$

$\rightsquigarrow h^A(f): h^A(Y) \to h^A($

$h^A(f): Hom_{\mathcal{C}}(Y, A) \to Hom$

$(Y \xrightarrow{g} A) \longmapsto (X \to$

tzn. $h_A(f)(g) = g \circ f$

Kon

Jeszcze jeden przykład funktora

6) Funktor abelianizacji $(\cdot)^{ab} : Grps \to Ab$ $\quad a^{-1}b^{-1}ab$

- $G^{ab} := G/[G,G]$, gdzie $[G,G] = \langle k[a,b] \mid a,b \in G \rangle$
  (G' — komutant; komutator)

- $f: G \to H \rightsquigarrow f^{ab}: G^{ab} \to H^{ab}$, $gG' \mapsto f(g)H'$ ← dobrze zdef; homomorfizm
  (G, H)

- $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$

$g^{ab}(f^{ab}(aG')) = g^{ab}(f(a)H') = g(f(a))K' = (g \circ f)(a)K' = (g \circ f)^{ab}(aK')$