TOPOSY

Transformacje naturalne, funktory reprezentowalne i lemat Yonedy.

1. Transformacje naturalne

Def. Dla danych kategorii $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{D}$ i funktorów $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ transformacja naturalna $\eta : F \Rightarrow G$ składa się z:

- morfizmów $\eta_X : F(X) \to G(X)$ dla każdego $X \in \mathcal{C}$ (nazywanych komponentami transformacji naturalnej), takich że dla każdego morfizmu $f : X \to Y$ w $\mathcal{C}$ poniższy diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

to jest: $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$

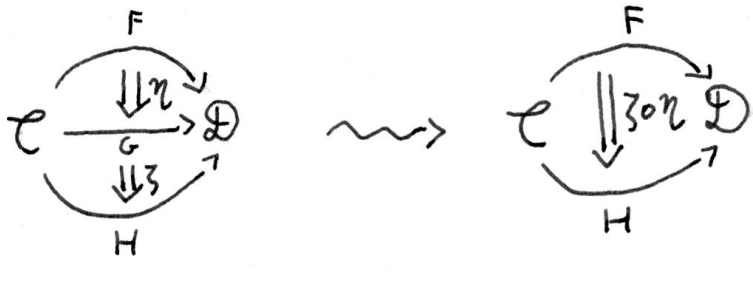
Def: Transformację naturalną nazywamy izomorfizmem naturalnym, jeżeli wszystkie jej komponenty są izomorfizmami.

Piszemy: $\alpha : F \cong G$

Def: (pionowe) składanie transformacji naturalnych definiujemy następująco:

Niech $F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ oraz $\eta : F \Rightarrow G$ i $\zeta : G \Rightarrow H$ wtedy dla $X \in \mathcal{C}$ komponenty $\zeta \circ \eta : F \Rightarrow H$ to:

$$(\zeta \circ \eta)_X := \zeta_X \circ \eta_X$$



Przykłady:

1) $\eta : h_{\{0\}} \Rightarrow id_{Sets}$

$\eta_X(f) = f(0)$

$h_{\{0\}}, id_{Sets} : Sets \to Sets$

$$\begin{array}{ccc} h_{\{0\}}(X) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ h_{\{0\}}(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & Y \end{array}$$

$\varphi(\eta_X(f)) = \varphi(f(0))$

$\eta_Y(\varphi_*(f)) = (\varphi \circ f)(0)$

---

2) $\eta : id_{Grps} \Rightarrow (-)^{OP}$

$\eta_G(a) = a^{-1}$

$(-)^{OP}, id_{Grps} : Grps \to Grps$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & G^{OP} \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{OP}} \\ H & \xrightarrow[\eta_H]{} & H^{OP} \end{array}$$

$\varphi^{OP}(\eta_G(g)) = g^{-1}$

$\eta_H(\varphi(g)) = g^{-1}$

---

3) $\eta : h^D \Rightarrow F$

$\eta_X(g) = g^{-1}(\{0\})$

$h^D, F : Top^{OP} \to Set$

$D = \{0,1\}$ z top. dyskretną

$F(X) =$ clopeny w X $\quad F(f)(U) = f^{-1}[U]$

$$\begin{array}{ccc} h^D(X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X) \\ {\scriptstyle \varphi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\varphi)} \\ h^D(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & F(Y) \end{array}$$

$F(\varphi) \circ \eta_X(f) = (\varphi^{-1} \circ f^{-1})[\{0\}]$

$\eta_Y \circ \varphi^*(f) = \eta_Y(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi)^{-1}[\{0\}]$

---

4) $\eta : O \Rightarrow C$

$\eta_X(U) = U^c$

$O, C : Top^{OP} \to Set$

$O(X) =$ z. otwarte w X $\quad O(f)(U) = f^{-1}[U]$

$C(X) =$ z. domknięte w X $\quad C(f)(U) = f^{-1}[U]$

$$\begin{array}{ccc} O(X) & \xrightarrow{\eta_X} & C(X) \\ {\scriptstyle O(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C(\varphi)} \\ O(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & C(Y) \end{array}$$

$C(\varphi) \circ \eta_X(U) = \varphi^{-1}[U^c]$

$\eta_Y \circ O(\varphi)(U) = (\varphi^{-1}[U])^c$

5) $\eta : id_{Vect_K} \Longrightarrow (-)^{**}$

$id_{Vect_K}, (-)^{**} : Vect_K \longrightarrow Vect_K$

$\eta_V(v) = e_v$

$e_v : V^* \to K \quad e_v(f) = f(v)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta_V} & V^{**} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{**}} \\ W & \xrightarrow[\eta_W]{} & W^{**} \end{array}$$

$\varphi^{**} \circ \eta_V(v)(f) = \varphi^{**}(e_v)(f) =$

$= (f \circ \varphi)(v)$

$\| \qquad\qquad \|$

$(\eta_W \circ \varphi)(v)(f) = f(\varphi(v))$

---

6) $\eta : id_{Set} \Longrightarrow P$

$id_{Set}, P : Set \to Set$

$\eta_X(a) = \{a\}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & P(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(f)} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & P(Y) \end{array}$$

$P(f) \circ \eta_X(a) = P(f)(\{a\}) = \{f(a)\}$

$\| \qquad\qquad \|$

$\eta_Y(f(a)) = \{f(a)\}$

2. Funktory reprezentowalne

Def. Niech $\mathcal{C}$ będzie lokalnie małą kategorią.
Funktor $F: \mathcal{C} \to Set$ nazywamy **funktorem reprezentowalnym**, jeżeli istnieją obiekt $A \in \mathcal{C}$ oraz izomorfizm naturalny $\alpha: h_A \cong F$.
Takie A oraz α nazywamy **reprezentacją** F.

Przykłady:

1.) $id_{Set}: Set \to Set$ jest reprezentowany przez singleton i nat. trans.: $\eta_X(a) = f: \{*\} \to X$, $f(*) = a$

2.) f. zapominania $U: Top \to Set$
repr. przez przestrzeń jednopunktową
i bijekcję między funkcjami z niej a elementami.

3.) f. zapominania $U: Grps \to Set$
repr. przez $\mathbb{Z}$ i nat. trans. która przyporządkowuje $g \in G$ homomorfizm mapujący 1 na g.

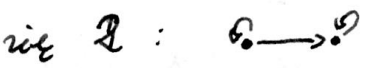
4.) funktor $U_n: Grps \to Set$ rozpatrujący grupę na n-krotki jej elementów
repr. przez grupę wolną na n generatorach podobnie jak w przykładzie 3).

5.) $O: Top^{op} \to Set$ rozpatrujący p. topologiczną na rodzinę jej zb. otwartych
repr. przez przestrzeń Sierpińskiego
i nat. trans. rozpatrującą f. ciągłą na przeciwobraz otwartego punktu.

6.) $ob : Cat \to Set$ — porządający małą kategorię na jej obiekty

repr. przez kategorię $\mathbb{1}$: 

7.) $mor : Cat \to Set$ — porządający małą kategorię na zbiór jej morfizmów

repr. przez kategorię $\mathbb{2}$: 

---

8) $izo : Cat \to Set$ — porządający małą kategorię na zbiór jej izomorfizmów

repr. przez kategorię $\mathbb{I}$: 

---

9) $U(-)^* : Vect_K \to Set$ — porządający p. liniową na zbiór wektorów jej przestrzeni dualnej

repr. przez K.

---

10) $P : Set^{op} \to Set$ — porządający zbiór na jego zbiór potęgowy

repr. przez $\Omega = \{0,1\}$

3. Lemat Yonedy

Twierdzenie: Lemat Yonedy

Dla dowolnego funktora $F: \mathcal{C} \longrightarrow Set$ oraz obiektu $A \in \mathcal{C}$ istnieje naturalna bijekcja:

$$ë : Nat(h_A, F) \longrightarrow F(A)$$

gdzie $Nat(G,F)$ to transformacje naturalne między G i F, a przez „naturalność" bijekcji rozumiemy komutowanie następujących diagramów:

- (naturalność w funktorze)

{ indeksy przy ë różnicują „tę samą" bijekcję dla różnych przypadków }

$$\begin{array}{ccc} Nat(h_A, F) & \xrightarrow{ë_F} & F(A) \\ {\scriptstyle \beta_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_A} \\ Nat(h_A, G) & \xrightarrow{ë_G} & G(A) \end{array}$$

$F, G : \mathcal{C} \longrightarrow Set$

dla każdego $\beta : F \Longrightarrow G$

i gdzie $\beta_*(\eta) = \beta \circ \eta$

- (naturalność w obiekcie)

$$\begin{array}{ccc} Nat(h_A, F) & \xrightarrow{ë_A} & F(A) \\ {\scriptstyle (f^*)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Nat(h_B, F) & \xrightarrow{ë_B} & F(B) \end{array}$$

dla każdego $A, B \in \mathcal{C}$, $f : A \longrightarrow B$

i gdzie $((f^*)^*(\eta))_X(g) = (\eta \circ f^*)_X(g) = \eta_X(g \circ f)$

dla $X \in \mathcal{C}$ i $g \in h_B(X)$

dowód:

~ Zacznijmy od zdefiniowania szukanej bijekcji:

$$\ddot{e} : Nat(h_A, F) \longrightarrow F(A)$$

$$\ddot{e}(\eta) := \eta_A(id_A)$$

Teraz pokażemy, że faktycznie jest to bijekcja.
Rozpatrzmy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\ {\scriptstyle f*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ h_A(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & F(B) \end{array}$$

z naturalności η komutuje on dla dowolnych $B \in \mathcal{C}$ i $f: A \to B$.
Oznacza to:

$$F(f) \circ \eta_A(id_A) = \eta_B \circ f_*(id_A) = \eta_B(f \circ id_A) = \eta_B(f)$$

A więc η jest zdeterminowana przez wartość $\eta_A(id_A)$, skąd nietrudno wywnioskować bijektywność $\ddot{e}$:

- „1-1": Niech $\eta, \zeta \in Nat(h_A, F)$ tzn. $\ddot{e}(\eta) = \ddot{e}(\zeta)$.
  Wtedy dla dowolnych $B \in \mathcal{C}$ i $g \in h_A(B)$ mamy:
  $$\eta_B(g) = F(f) \circ \eta_A(id_A) = F(f) \circ \ddot{e}(\eta) = F(f) \circ \ddot{e}(\zeta) = \zeta_B(g)$$
  Oznacza to równość dowolnych komponentów η i ζ, a więc $\eta = \zeta$
- „na": Ustalmy dowolne $X \in F(A)$. Niech $\alpha : h_A \Rightarrow F$ będzie tranformacją naturalną, której komponenty są zadane:
  $$\alpha_B(g) := F(g) \circ X.$$
  Wtedy: $\ddot{e}(\alpha) = \alpha_A(id_A) = F(id_A)(X) = id_{F(A)}(X) = X$.
  Alternatywnie w ten sposób można zdefiniować funkcję odwrotną.

Kończy to dowód bijektywności.

dowodu części dalszej

~ Pokażemy teraz naturalność zadanej bijekcji

- naturalność w funktorze:

  Niech $\eta \in Nat(h_A, F)$ Mamy wtedy:

  $$\beta_{*A} \circ \ddot{e}_F(\eta) = \beta_A \circ \eta_A(id_A)$$

  oraz:

  $$\ddot{e}_G \circ \beta_*(\eta) = \ddot{e}_G(\beta \circ \eta) = (\beta \circ \eta)_A(id_A) = \beta_A \circ \eta_A(id_A)$$

  co daje pożądaną równość.

- naturalność w obiekcie:

  Niech $\eta \in Nat(h_A, F)$ Mamy wtedy:

  $$F(f) \circ \ddot{e}_A(\eta) = F(f) \circ \eta_A(id_A)$$

  oraz:

  $$\ddot{e}_B \circ (f^*)^*(\eta) = \ddot{e}_B \circ (\eta \circ f^*) = (\eta \circ f^*)_B(id_B) =$$

  $$= \eta_B \circ f^*_B(id_B) = \eta_B(id_B \circ f) = \eta_B(f) = F(f) \circ \eta_A(id_A)$$

  co daje pożądaną równość. □

<u>Wniosek</u>: Niech $A, B \in \mathcal{C}$. Wtedy istnieje odpowiedniość:

$$Nat(h_A, h_B) \longleftrightarrow h_B(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

<u>Uwaga</u>: Lemat Yonedy można również sformułować w wersji kontrawariantnej:

$$Nat(h^A, F) \longrightarrow F(A) \qquad F: \mathcal{C}^{op} \to Set$$