

The Hitchhiker's Guide to Topology

Poradnik samopomocy topologicznej

יעקב גוגולוק

Get in loser

We're going to
Therapy

Spis treści

Spis treści	2
Instrukcja korzystania z poradnika	3
1 Garść definicji i slangu z wykładu	4
2 Pierwszy kontakt z przestrzeniami topologicznymi	5
3 Wnętrze i domknięcie	6
4 Spójność	8

Instrukcja korzystania z poradnika

Poradnik ciągle w budowie...

Oto poradnik samopomocy topologicznej dla wszystkich biednych dusz, które nie potrafią zaprzyjaźnić się z pojęciem przestrzeni topologicznej. Poza krótkim przypomnieniem kilku definicji poradnik składa się z samych zadań, które mają pomóc przełamać barierę mózg-topologia. Zadania są rozpisane na drobne fragmenty, z których spora część jest *naprawdę trywialna* (np. wynika bezpośrednio z definicji, bez żadnych przekształceń itd.). **Celem zadań nie jest trudność, tylko wymuszenie bardzo dokładnego spojrzenia na obiekty, którymi się zajmujemy.** W szczególności, zadania zaczynają się od najprostszych przykładów, które można rozważyć na palcach, i na których można przetestować wszystkie poznawane definicje.

W rozdziale 1 szybko przypominamy najważniejsze definicje z wykładu. Z racji, że to jest streszczenie i poradnik, akcja dzieje się szybko i bez przykładów - przykłady będą w zadaniach. Świadomie ignoruję przestrzenie metryczne i skupiam się na rozterkach czysto topologicznych.

W rozdziale 2 analizujemy dogłębnie (ew. mozolnie) najmniej skomplikowane przestrzenie topologiczne i testujemy na nich wszystkie definicje z poprzedniego rozdziału.

Rozdział 3 ma pomóc zaprzyjaźnić się z pojęciem wnętrza i domknięcia. Zawiera też kilka przydatnych ogólnych własności, które mogą się przydać w ciągu całego semestru.

Poza zadaniami zawartymi w głównym tekście są też dodatkowe komentarze na marginesach, które zawierają wskazówki, ostrzeżenia albo inne wartościowe wyjaśnienia.

***Ostrzeżenie:** autor kłamie - na marginesach umieszcza też niekiedy swojej wątpliwej jakości żarty.*

Kilka rad przy rozwiązywaniu zadań

Upewnij się, że rozumiesz wszystkie słowa z polecenia. Jeśli nie znasz któregoś słowa, odszukaj jego definicję i ją zapisz na kartce. Nie odpowiadaj na pytania, których treści nie rozumiesz w pełni - takim sposobem można nabawić się problemów tak w matematyce jak i w życiu.

Działaj. Jeśli masz sprawdzić, że A spełnia $\mathcal{P}$ to weź definicję $\mathcal{P}$ i zapisz, co to znaczyłoby, że A ją spełnia. Kombinuj, używaj założeń, zobacz jak się mają do tezy. W razie problemów, zastanów się, czy na pewno rozumiesz wszystkie słowa dookoła Ciebie i w razie potrzeby wróć do wcześniejszej rady.

Rób rysunki i diagramy. Topologia to nauka o przestrzeniach i ich ciągłych przekształceniach. Wizualizuj sobie to co się dzieje. W przeciętnym dowodzie topologicznym pojawia się przynajmniej kilka zbiorów i punktów, które w jakiś konkretny sposób się przecinają/omijają. Rysuj plamki oznaczające zbiory, nanoś punkty, rysuj niektóre rzeczy przerywaną linią. Jeśli czujesz się *fancy*, używaj kolorów. Rysunek ma być Twoim osobistym i ma Ci pomóc zrozumieć, co się dzieje w zadaniu.

1 Garść definicji i slangu z wykładu

Przestrzeń topologiczna to niepusty zbiór X wraz z wyróżnioną rodziną $\mathcal{T}$ złożoną z podzbiorów X , która spełnia warunki:

1. X oraz $\emptyset$ należą do $\mathcal{T}$,
2. Jeśli A oraz B należą do $\mathcal{T}$, to również $A \cap B$ należy do $\mathcal{T}$,
3. Jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ jest dowolną rodziną zbiorów otwartych, suma $\bigcup \mathcal{A}$ należy do $\mathcal{T}$.

Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy **topologią**, a jej elementy **zbiorami otwartymi** przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

Na potrzeby następnych kilku definicji ustalmy przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$. Będziemy w notacji i mowie zazwyczaj pomijać $\mathcal{T}$ i mówić po prostu o „przestrzeni topologicznej X ”, „otwartych podzbiórach X ” i tak dalej, o ile wiadomo, jaką topologię na X rozważamy. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy **domkniętym** jeśli jego dopełnienie $X \setminus A$ jest otwarty. Jeśli zbiór jest jednocześnie otwarty i domknięty, to mówimy, że jest **otwarto-domknięty**. Jeśli $a \in X$ i U jest zbiorem otwartym takim, że $a \in U$, to mówimy, że U jest **otoczeniem** a .

Typowy podzbiór $A \subseteq X$ zazwyczaj nie jest ani otwarty, ani domknięty. Okazuje się za to (i udowodnimy to później), że zawsze istnieje największy zbiór otwarty zawarty w A - nazywamy go **wnętrzem zbioru** A i oznaczamy $\text{Int } A$. Analogicznie, zawsze istnieje najmniejszy zbiór domknięty zawierający A - nazywamy go **domknięciem zbioru** A i oznaczamy przez $\bar{A}$.

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **ciągła** jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}[U] \subseteq X$ jest otwartym podzbiorem X . Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy **homeomorfizmem** jeśli jest ciągłą bijekcją i funkcja odwrotna $f^{-1}: Y \rightarrow X$ też jest ciągła. Jeśli między X i Y istnieje homeomorfizm, to mówimy, że X i Y są **homeomorficzne**.

Niech $x_0, \dots, x_n, \dots \in X$ będzie ciągiem punktów przestrzeni X i niech $a \in X$. Mówimy, że **ciąg** (x_n) **jest zbieżny do** a jeśli dla dowolnego otoczenia U punktu a prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do U . „Prawie wszystkie” znaczy tu to samo co na Analizie I/1: istnieje n_0 takie, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi $x_n \in U$.

Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną zbiorów otwartych. Mówimy, że $\mathcal{B}$ jest **bazą przestrzeni** X , jeśli dowolny otwarty podzbiór $U \subseteq X$ można zapisać jako sumę pewnej podrodziny $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Pora na odrobinę slangu: jeśli mamy ustaloną jakąś bazę przestrzeni X to często nazywamy zbiory $U \in \mathcal{B}$ **zbiorami bazowymi**; na tej samej zasadzie, jeśli $a \in U$ oraz $U \in \mathcal{B}$, to U nazywamy **otoczeniem bazowym** punktu a .

Dla osób wolących sumy indeksowane: jeśli $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ jest dowolną rodziną zbiorów należących do $\mathcal{T}$, to również $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Quiz: Co warunki 1-3 z definicji topologii mówią o zbiorach domkniętych?

Quiz: jakie dwa zbiory są otwarto-domknięte w dowolnej przestrzeni topologicznej?

Powtórka z WdM: „ B to największy zbiór o własności $\heartsuit$ ” znaczy „ B ma własność $\heartsuit$ oraz jeśli C jest dowolnym zbiorem o własności $\heartsuit$, to $C \subseteq B$ ”.

Slang: przestrzenie homeomorficzne są nierozróżnialne dla topologa.

Ostrzeżenie: ciąg może mieć więcej niż jedną granicę! Za niedługo poznamy taki przykład.

Ostrzeżenie: To pojęcie ma dokładnie zero związku z pojęciem bazy przestrzeni liniowej.

2 Pierwszy kontakt z przestrzeniami topologicznymi

Problem 1: Skrajności

Na każdym niepustym zbiorze X możemy określić dwie „ekstremalne” topologie:

- **topologię dyskretną** $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ (rodzina wszystkich podzbiorów X),
- **topologię antydyskretną** $\mathcal{T}_{ad} = \{X, \emptyset\}$.

Zamiast mówić „przestrzeń $(X, \mathcal{T}_d)$ ” mówi się po prostu „ X z topologią dyskretną” i analogicznie dla topologii antydyskretnej.

W poniższych zadaniach X jest dowolnym ustalonym niepustym zbiorem. Będziemy chcieli zbadać własności topologii dyskretnej i antydyskretnej (w szczególności, każdy z podpunktów 2 do 4 to dwa osobne ćwiczenia).

1. Opisz, jak wyglądają zbiory domknięte w przestrzeni X z topologią (anty)dyskretną.
2. Niech $A \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem. Opisz jak wygląda domknięcie i wnętrze zbioru A w przestrzeni X z topologią (anty)dyskretną.
3. Kiedy ciąg (x_n) punktów X jest zbieżny w topologii (anty)dyskretnej? Czy zawsze istnieje co najwyżej jedna granica? Czy istnieją ciągi bez granicy?
4. Wskaż bazę przestrzeni X . Czy potrafisz wskazać inną?

Zauważ, że każda topologia $\mathcal{T}$ na X spełnia warunek $\mathcal{T}_{ad} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$ (to uzasadnia użycie wyrażenia „ekstremalne topologie”).

Na razie wewnątrz należy rozumieć (zgodnie z definicją z poprzedniej strony) jako „największy zbiór otwarty zawierający A ” - w takim razie, żeby je wyznaczyć, należy najpierw wyznaczyć wszystkie zbiory otwarte zawierające A ; analogicznie dla domknięcia. W następnym podrozdziale poznamy efektywniejsze metody wyznaczania domknięcia i wnętrza.

Problem 2: Najprostsza nietrywialna przestrzeń

W poniższych zadaniach zbiór X składa się z dwóch różnych elementów a oraz b .

1. Ile jest topologii na zbiorze X , które nie są topologią dyskretną ani antydyskretną? Wypisz wszystkie. *Zrób rysunek.*
2. Wybierz dwie różne topologie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ jak w podpunkcie 1. Niech X_1 oznacza X z topologią $\mathcal{T}_1$, a X_2 oznacza X z topologią $\mathcal{T}_2$. Wypisz wszystkie funkcje $f: X_1 \rightarrow X_2$ a następnie sprawdź, które z nich są ciągłe. Które z nich są homeomorfizmami?
3. Przestrzeń X z topologią $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ nazywa się czasem **przestrzenią Sierpińskiego**. *Zrób rysunek.* Opisz ciągi zbieżne w tej przestrzeni oraz operację domknięcia i wnętrza w tej przestrzeni.
4. Znajdź wszystkie homeomorfizmy przestrzeni Sierpińskiego w siebie.

3 Wnętrze i domknięcie

Problem 3: Wnętrze istnieje, yay!

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $A \subseteq X$. Chcemy pokazać, że wnętrze A jest dobrze zdefiniowane tzn. że istnieje największy zbiór otwarty zawarty w A . Pokażemy nawet coś konkretniejszego, mianowicie że wnętrze to dokładnie

$$\text{Int } A = \bigcup \{U : U \text{ jest zbiorem otwartym oraz } U \subseteq A\} \quad (\clubsuit)$$

Dowód przeprowadzimy w kilku krokach.

1. Niech $\mathcal{A} := \{U : U \text{ jest zbiorem otwartym oraz } U \subseteq A\}$. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{A}$ jest zbiorem otwartym.
2. Pokaż, że jeśli U jest zbiorem otwartym zawartym w A , to $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
3. Wywnioskuj, że wnętrze zbioru A jest dobrze zdefiniowane i zachodzi wzór $(\clubsuit)$.
4. Sformułuj i udowodnij odpowiedniki powyższych faktów dla domknięcia. W szczególności, zapisz wzór analogiczny do $(\clubsuit)$ opisujący $\bar{A}$.

Problem 4: Kilka przydatnych własności

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $A \subseteq X$. W poniższych zadaniach zrobienie rysunku do każdego podpunktu i dowodu jest **absolutnie konieczne** i ucieczka od tego jest niewybaczalna.

1. Pokaż, że $x \in \text{Int } A$ wtedy i tylko wtedy, istnieje otoczenie U punktu x , które jest zawarte w A .
2. Dualnie, pokaż, że $x \in \bar{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne otwarte otoczenie U punktu x przecina zbiór A , tj. $U \cap A \neq \emptyset$.
3. Korzystając z powyższych podpunktów, pokaż, że zachodzi wzór $X \setminus \text{Int } A = \overline{X \setminus A}$.
4. Udowodnij wzór z poprzedniego podpunktu, tym razem korzystając ze wzoru $(\clubsuit)$ i jego odpowiednika dla domknięcia.
5. Pokaż (np. korzystając z podpunktu 1.), że dla dowolnych $A, B \subseteq X$ zachodzi $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.
6. Sformułuj i udowodnij podobną własność dla domknięcia.

Niepotrzebna uwaga: „dualnie” to seksowniejsze „analogicznie” używane przez matematyków w sytuacji, gdy jakieś dwie sytuacje są swoimi lustrzanymi odbiciami. Tutaj po jednej stronie lustra są zbiory otwarte, po drugiej są zbiory domknięte, a samo lustro to operacja dopełnienia.

Powtórka z WdM: istnieją prawa de Morgana.

Ostrzeżenie: na ogół $\text{Int}(A \cup B)$ to nie to samo co $\text{Int } A \cup \text{Int } B$ - później zobaczymy konkretny przykład.

Problem 5: Wyznaczanie wnętrza i domknięcia przy pomocy bazy

Założmy, że $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni X . Niech $A \subseteq X$ będzie dowolnym podzbiorem X . W poniższych zadaniach przed przystąpieniem do rozwiązywania zapisz treść polecenia bez użycia slangu, np. symbolicznie.

1. Pokaż, że $x \in \text{Int } A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie bazowe x zawarte w A .
2. Pokaż, że $x \in \bar{A}$ wtedy i tylko wtedy, każde otoczenie bazowe x przecina zbiór A .

*Tu kiedyś będzie o zwartości, aksjomatach oddzielania i
ośrodkowości...*

4 Spójność

Mówimy, że przestrzeń X jest **spójna**, jeśli nie można zapisać jej w postaci $X = A \cup B$, gdzie A, B są otwarte, rozłączne i nietrywialne (czyli różne od X i $\emptyset$). Jeśli przestrzeń X jest niespójna, to zapisanie X jako sumy $X = A \cup B$ dla A, B jak wyżej będziemy nazywać **rozkładem** X . Nie jest to standardowa terminologia, będziemy jej używać dla wygody, żeby nie pisać ciągle „otwarte, rozłączne (...)”.

**Będziemy jej używać, ponieważ autor jest leniwy.*

Intuicyjnie, przestrzeń jest niespójna jeśli można ją rozłożyć na dwa oddzielne kawałki.

Problem 6: Niespójna rozgrzewka

Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

1. Pokaż, że jeśli $X = A \cup B$ jest rozkładem X , to A oraz B są też domknięte.
2. Pokaż, że jeśli w X istnieje nietrywialny zbiór otwarto-domknięty, to X jest niespójna.
3. Wywnioskuj z poprzednich punktów, że przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera w sobie nietrywialnych zbiorów otwarto-domkniętych.
4. Korzystając z poprzednich punktów udowodnij, że przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną funkcją ciągłą $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ są funkcje stałe (gdzie na $\{0, 1\}$ bierzemy topologię dyskretną).

Tautologiczne zadanie:
Zauważ, że jeśli $X = A \cup B$ jest rozkładem X , to zbiory A, B można oddzielić zbiorami otwartymi. W takim razie, A, B są faktycznie „oddzielonymi kawałkami X ” w sensie topologii.

Przypuszczalnie udowodnisz więcej, mianowicie że rozkłady X odpowiadają dokładnie zbiorom otwarto-domkniętym w X .

Problem 7: Odcinek jest spójny

Chcemy pokazać, że odcinek $[0, 1]$ z topologią euklidesową jest przestrzenią spójną. Załóżmy, że tak nie jest i niech $[0, 1] = A \cup B$ będzie rozkładem $[0, 1]$. Weźmy $a \in A, b \in B$ i bez straty ogólności załóżmy, że $a < b$.

1. Zauważ, że zbiory A, B są też domknięte (patrz: poprzednie zadanie).
2. Rozważ liczbę $c = \sup\{x: [a, x] \subseteq A\}$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że $c \in A$.
3. Zauważ, że skoro A jest otwarty oraz $c \in A$ to istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq A$. Zrób rysunek i dojdź do sprzeczności z definicją c (gdzie leży b ?).

Oczywiście gdyby odcinek nie był spójny należałoby uznać, że topologizy są pijani albo niespełna rozumu.

Rysunek!

Przestrzeń X jest **drogowo spójna**, jeśli dowolne dwa punkty $a, b \in X$ można połączyć **drogą**, tj. istnieje funkcja ciągła $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ taka, że $\gamma(0) = a$ oraz $\gamma(1) = b$.

Jeśli nie miałeś/eś takiego odruchu, to zrób rysunek.

Problem 8: This just in: Drogowo spójne przestrzeni są spójne

Załóżmy, że X jest przestrzenią drogowo spójną. Pokaż, że X jest przestrzenią spójną. **Wskazówka:** Załóżmy, że tak nie jest i niech $X = A \cup B$ będzie rozkładem X . Weź $a \in A$ oraz $b \in B$ i połącz je drogą $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. Co możesz powiedzieć o zbiorach $A' = \gamma^{-1}[A]$

oraz $A' = \gamma^{-1}[B]$? Pamiętaj, że już dzielnie udowodniłeś/eś, że $[0, 1]$ jest przestrzenią spójną.