

ZASADA SZUFLADKOWA

1. Zastanowić się, czy zasada szufladkowa wymaga dowodu.
2. Sprawdzić przez indukcję, że jeżeli $n(r-1) + 1$ przedmiotów umieścimy w n szufladach to pewna szuflada zawiera $\geq r$ przedmiotów.
3. Pokazać, że wśród 52 liczb całkowitych znajdują się dwie różne, których suma lub różnica dzieli się przez 100.
4. Dane są liczby naturalne $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{37} = 60$. Wykazać, że $a_j - a_i = 13$ dla pewnych $i < j$.
5. 41 wież umieszczono na szachownicy 10×10 . Pokazać, że można znaleźć 5 wież, które się nie atakują.

Wskazówka: Wieże atakują po liniach poziomych i pionowych. Zwinąć szachownicę w cylinder łącząc przeciwne strony i pokolorować przekątne 10 kolorami.

6. Pokazać, że wśród 15 różnych liczb naturalnych nie przekraczających 100, są 4 liczby a, b, c, d takie, że $a + b = c + d$ lub 3 liczby a, b, c tworzące postęp arytmetyczny.
7. Pokazać, że dla $n \geq 2$, w grupie n osób są dwie, które mają tę samą liczbę znajomych w grupie.
8. Udowodnić, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.
9. Na przyjęcie przyszło 100 osób. Każda osoba ma (być może 0) parzystą liczbę znajomych. Pokazać, że są przynajmniej 3 osoby mające tyle samo znajomych.
10. Pokazać, że wśród 5 punktów w kwadracie o boku 2 są dwa w odległości $\leq \sqrt{2}$.
11. Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 umieścimy 17 punktów to odległość pewnych dwóch punktów nie przekracza 1.
12. W kwadracie o boku 1 danych jest $2n+1$ punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że pewne trzy punkty tworzą trójkąt o polu $\leq 1/(2n)$.
13. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (o obu współrzędnych całkowitych). Wykazać, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest kratowy.

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

14. Udowodnić, że dla każdej liczby niewymiernej α istnieją ciągi liczb całkowitych p_n, q_n , takie że $q_n \rightarrow \infty$ oraz

$$|\alpha - p_n/q_n| < 1/q_n^2 \quad \text{dla każdego } n.$$

Wskazówka: Dla ustalonej liczby naturalnej N rozpatrzeć ciąg $n\alpha - [n\alpha]$ dla $n = 0, 1, \dots, N$.

15. Udowodnić, że dla danej liczby pierwszej $p > 2$ istnieją liczby naturalne x, y , takie że liczba $1 + x^2 + y^2$ jest podzielna przez p .
16. Pewna organizacja złożona z n członków ($n > 5$) ma $n+1$ trzyosobowych komitetów, o różnych składach. Pokazać, że są dwa komitety mające tylko jednego wspólnego członka.