

ZLICZANIE ZBIORÓW, ZBIORY Z POWTÓRZENIAMI

1. W brydża gra czterech graczy; na początku każdy dostaje 13 kart z talii 52 kart.
Ile jest sposobów potasowania talii 52 kart ? Ile różnych układów kart może dostać gracz?
Na ile sposobów można rozdać talie?
2. Ile różnych dodatnich dzielników ma liczba $3^4 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$, a ile liczba 620 ?
3. Ile zer na końcu ma liczba $50!$?
4. Ile liczb większych od 5400 ma różne cyfry, wśród których nie występują 2 i 7 ?
5. Niech X będzie zbiorem liczb czterocyfrowych, mających cyfry ze zbioru $\{1, 2, \dots, 5\}$. Niech A będzie podzbiorem tych $x \in X$, które mają różne cyfry, a B zbiorem tych $x \in X$, które są parzyste. Obliczyć $|A|, |B|, |A \cap B|, |A \setminus B|, |B \setminus A|, |X \setminus (A \cup B)|$.
6. Na ile sposobów można posadzić 12 osób przy okrągłym stole, jeśli pewna para osób odmawia siedzenia obok siebie ?
7. Wyznaczyć liczbę permutacji kołowych liczb $0, 1, 2, \dots, 9$, w których 0 i 9 nie leżą naprzeciwko.
8. Ile zbiorów złożonych z 3 liczb można utworzyć spośród liczb $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, jeśli zbiór nie może zawierać dwu kolejnych liczb ?
9. Drużyna piłkarska złożona z 11 graczy ma być wybrana spośród 15 zawodników, wśród których 5 gra tylko w obronie, 8 gra w ataku i 2 może grać i w obronie i w ataku. Przyjmując, że w drużynie 7 zawodników gra w ataku i 4 w obronie, ile można utworzyć drużyn piłkarskich ?
10. Na ile sposobów można umieścić 8 wież na szachownicy tak, że żadna wieża nie atakuje innej (tzn. dwie wieże nie mogą znajdować się na jednej linii pionowej lub poziomej) ? Na ile sposobów, jeśli każda wieża jest inaczej oznaczona ?
11. Mamy 5 identycznych wież koloru czerwonego i 3 koloru niebieskiego. Na ile sposobów można je umieścić na szachownicy 8×8 , aby się nie atakowały ?
12. Na ile sposobów można posadzić 6 panów i 6 pań przy okrągłym stole, jeśli panie i panowie mają siedzieć na przemian ?
13. Czterosobowy komitet ma być wybrany spośród członków klubu, który składa się z 10 panów i 12 pań. Na ile sposobów można utworzyć komitet, jeśli musi on zawierać przynajmniej dwie panie ? Na ile sposobów, jeśli dodatkowo Pani Ładna i Pan Przystojny odmawiają być razem w Komitecie ?
14. Sekretarka pracuje w budynku położonym 9 przecznic na wschód i 7 na północ od swojego domu. Codziennie przechodząc do pracy przechodzi 16 odcinków ulic. Ile jest możliwych tras ? Załóżmy, że odcinek ulicy w kierunku wschodnim, zaczynający się 4 przecznice na wschód i 3 na północ, został zalany, a sekretarka nie umie (lub nie chce) pływać. Ile jest wtedy możliwych tras ?

15. Niech S będzie zbiorem z powtórzeniami, w którym liczby powtórzeń wynoszą $n_1, n_2, \dots, n_k$, przy czym $n_1 = 1$. Pokazać, że przy oznaczeniu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ liczba permutacji kołowych tego zbioru wynosi $\frac{(n-1)!}{n_2! \dots n_k!}$.
16. Wyznaczyć liczbę 11 elementowych wariacji zbioru z powtórzeniami $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$.
17. Wyznaczyć liczbę 10 elementowych wariacji zbioru z poprzedniego zadania.
18. Wyznaczyć liczbę wszystkich kombinacji (dowolnego rozmiaru) zbioru z powtórzeniami $S = \{n_1 \cdot a_1, \dots, n_k \cdot a_k\}$.
19. Piekarnia sprzedawała 6 rodzajów ciastek. Ile różnych tuzinów ciastek można było kupić ?
20. Na ile sposobów można rozdzielić 12 identycznych jabłek i 1 pomarańczę pomiędzy troje dzieci tak, aby każde dziecko otrzymało przynajmniej jeden owoc ?
21. Wyznaczyć liczbę r -kombinacji zbioru $\{1 \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$. Ogólniej, wyprowadzić wzór na liczbę r -kombinacji zbioru, w którym liczby powtórzeń są równe 1 lub ∞ .
22. Niech A_1, A_2, A_3 będą podzbiorami zbioru skończonego X . Sprawdzić, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$
23. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 5 ani 6 ?
24. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 6, 7 ani 10 ?
25. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), które nie są kwadratami ani sześciانami liczb całkowitych ?
26. Znaleźć liczbę 10-kombinacji multizbioru $S = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$.
27. Piekarnia ma w sprzedaży słodkie bułki: 3 z czekoladą, 7 z dżemem i 3 bez nadzienia. W pudełku mieści się 12 bułek. Ile różnych pudełek można kupić w piekarni ?
28. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ w nieujemnych liczbach całkowitych nie przekraczających 8.
29. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ w liczbach całkowitych takich, że $1 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $4 \leq x_3 \leq 8$ i $2 \leq x_4 \leq 6$.

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

30. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie dzieli ją na co najwyżej $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$ obszarów.
31. Udowodnić, że n płaszczyzn dzieli przestrzeń na co najwyżej $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ obszarów.
32. Niech a będzie liczbą całkowitą, a $p > 2$ liczbą pierwszą. Wykazać, że istnieją liczby całkowite x, y , takie że $(x, y) \neq (0, 0)$, $|x|, |y| \leq \sqrt{p}$ oraz p dzieli $ax - y$.

ZADANIE UZUPEŁNIAJĄCE, DLA BRYDŻYSTÓW

33. Gramy szlema w piki, mamy $\spadesuit AKW109$ w ręce i $\spadesuit xxx$ na stole; komunikacja swobodna. Dlaczego impasujemy? Dlaczego gramy 'z góry', gdy na stole są cztery plotki pikowe?