

1. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k$ i $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 10^k$.
2. Używając argumentacji kombinatorycznej udowodnić tożsamość dla $n \geq 3$ (w podanej formie)

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

Wskazówka: Niech S będzie zbiorem z 3 wyróżnionymi elementami a , b i c . Zliczyć pewne k -kombinacje S .

3. Wyprowadzić wzór

$$1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1}.$$

Wskazówka 1: zróżniczkować wzór na $(1+x)^n$.

Wskazówka 2: Jesteś szefem zespołu n pracowników. Oblicz na ile sposobów możesz dać pewnej liczbie osób podwyżkę i dodatkowo jedną z tych osób awansować.

4. Pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi wzór

$$\binom{n}{1} - 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} - 4 \binom{n}{4} + \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0.$$

5. Za pomocą całkowania wzoru dwumianowego wyprowadzić wzór

$$1 + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \frac{1}{4} \binom{n}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

6. Sprawdzić przez indukcję wzór

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

7. Obliczyć sumę $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ korzystając ze wzoru $m^2 = 2 \binom{m}{2} + \binom{m}{1}$ oraz z poprzedniego zadania.

8. Znaleźć liczby całkowite a , b i c spełniające

$$m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1}.$$

Następnie znaleźć wzór na $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

9. Przypomnijmy, że dla $x \in \mathbb{R}$ i naturalnej liczby $k \geq 1$ definiujemy

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Dodatkowo, $\binom{x}{0} = 1$ i $\binom{x}{-k} = 0$. Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i wszystkich liczb całkowitych k i m zachodzą wzory

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}, \quad \binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}, \quad \binom{x}{m} \binom{m}{k} = \binom{x}{k} \binom{x-k}{m-k}.$$

10. Używając argumentacji kombinatorycznej pokazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m_1 , m_2 i n mamy

$$\sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

11. Znaleźć wzór na

$$\sum_{\substack{r, s, t \geq 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r} \binom{m_2}{s} \binom{m_3}{t},$$

gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych r , s i t spełniających $r+s+t=n$.

12. Pokazać, że dla całkowitych dodatnich liczb n i k zachodzi wzór

$$k^n = \sum \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k},$$

gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $n_1, n_2, \dots, n_k$ spełniających $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

13. Udowodnić za pomocą wzoru Taylora, że dla $|x| < 1$ i dowolnej liczby α zachodzi wzór

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

14. Udowodnić przez indukcję, że dla dowolnej naturalnej liczby n mamy

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k, \quad |z| < 1.$$

NIEPORZĄDKI

Poniżej D_n oznacza ilość *nieporządków* na zbiorze n -elementowym, czyli liczbę permutacji bez punktu stałego.

15. Wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 8\}$, w których żadna liczba parzysta nie znajduje się na swojej naturalnej pozycji.
16. Znaleźć ogólny wzór na liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których dokładnie k liczb znajduje się na swoich naturalnych pozycjach.
17. Za pomocą argumentów kombinatorycznych wyprowadzić tożsamość

$$n! = \binom{n}{0} D_0 + \binom{n}{1} D_1 + \binom{n}{2} D_2 + \dots + \binom{n}{n-1} D_{n-1} + \binom{n}{n} D_n.$$

(Przyjmujemy $D_0 = 1$.)

18. Pokazać, że liczby D_n spełniają równanie $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$ dla $n \geq 3$.
19. Dla liczby naturalnej n oznaczmy przez Q_n liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie zawierają w sobie 12, 23, $\dots$, $(n-1)n$. (dla $n=3$ dopuszczalnymi permutacjami są 213, 321, 132, ale np. 231 jest niedopuszczalna). Pokazać, że dla $n \geq 1$ zachodzi wzór

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1} (n-1)! + \binom{n-2}{2} (n-2)! - \binom{n-3}{3} (n-3)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!.$$

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

20. Zadania z Rozdziału 1 (Wzór Stirlinga) zbioru zadań Światosława R. Gala.