

Uwaga: Zadania 1-7 ze zbioru Ś. Gala. W zależności od źródła, w numeracji liczb Catalana może wystąpić przesunięcie. Na przykład, na wykładzie liczba C_n była zdefiniowana jako liczba nawiasów w $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$; tym samym, w zależności od interpretacji, mamy

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} \quad \text{lub} \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

1. Pokaż, że następujące liczby, oznaczane przez C_k i nazywane liczbami Catalana, są równe (w razie problemów z interpretacją załóżmy, że $C_0 = C_1 = 1$):
 - (i) liczbie połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2k$ -kąta, tak by odpowiadające mu przekątne (lub boki) się nie przecinały,
 - (ii) liczbie podziałów $(k+2)$ -kąta wypukłego przekątnymi na trójkąty,
 - (iii) liczbie spacerów po siatce kwadratowej z punktu $(0,0)$ do (k,k) pozostających pod przekątną i takich, że w każdym kroku można zwiększyć dowolną współrzędną o jeden,
 - (iv) liczbie ciągów $(x_1, \dots, x_{2n})$, takich że $x_i \in \{-1, 1\}$, $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$ oraz $\sum_{i=1}^k x_i \geq 0$ dla każdego $k \leq 2n$.
2. Znajdź (np. *wygooglaj*) inne kombinatoryczne interpretacje liczb Catalana, na przykład ilość drzew binarnych.
3. Niech S_n oznacza liczbę (nieuporządkowanych) par spacerów (γ_1, γ_2) długości n na płaszczyźnie o tej własności, że każdy spacer wykonuje kroki tylko w prawo lub w górę długości jeden, spacery zaczynają się w punkcie $(0,0)$ i mają wspólne tylko końce. Jak liczby S_n są związane z liczbami Catalana?
4. W zadaniu poprzednim rozważać spacery długości n , które mogą się spotykać po drodze, ale nie mogą się "krzyżować".
5. Oblicz liczbę kształtów, jakie można uzyskać, ustawiając jednakowe monety w stos tak, że w najniższym poziomie znajduje się n monet ułożonych jedna obok drugiej w linii, a każda moneta w następnej warstwie musi się opierać na dwu połówkach monet leżących poniżej.
6. Pokaż, że $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.
7. Znajdź kombinatoryczny dowód powyższej formuły.
8. Udowodnij kombinatorycznie, że liczba wszystkich funkcji niemalejących

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie $n \geq 1$, spełniających warunek $f(i) \leq i$ dla $i \leq n$, wynosi $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

LICZBY STIRLINGA

9. Przypomnijmy, że **liczby Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, oznaczane też $S_2(n, k)$, można zdefiniować

- (a) kombinatorycznie: $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ jest liczbą podziałów zbioru n -elementowego na k niepustych podzbiorów
- (b) analitycznie: $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ są współczynnikami we wzorze

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\bar{k}}, \text{ gdzie } x^{\bar{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Sprawdzić, że w obu przypadkach otrzymujemy te same liczby, spełniające warunek rekurencyjny

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

10. Wykazać, że $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ jest ilością surjekcji zbioru n elementowego na zbiór k elementowy.

11. Udowodnić, że dla $n \geq 3$ zachodzi wzór

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

12. Znaleźć kombinatoryczny dowód tożsamości

$$\sum_{k=0}^m k \left\{ \begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n+m+1 \\ m \end{smallmatrix} \right\}$$

13. **Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju.** Definiujemy $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ jako liczbę sposobów rozmieszczenia n obiektów w k cyklach, przy czym $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 1$. Sprawdzić, że

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

14. Obliczyć $\sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

15. Znaleźć kombinatoryczne dowody tożsamości

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (n+k) \left[\begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} m+n+1 \\ m \end{smallmatrix} \right]; & \sum_{k=m}^n \left[\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right] \frac{n!}{k!} &= \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right]; \\ \sum_{k=1}^n k \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]; & \sum_{k=m}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \binom{k}{m} &= \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned}$$

16. Sprawdzić, że oznaczając $x^{\bar{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1)$, mamy

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}, \quad x^n = \sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] (-1)^{n-k} x^k.$$

17. **Liczby Bella.** Niech $B(n)$ będzie liczbą wszystkich partycji zbioru n -elementowego na niepuste podzbiory; sprawdzić że $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$ oraz znaleźć wzór rekurencyjny na $B(n)$.

18. Sprawdzić, że $B(n) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.