

FUNKCJE TWORZĄCE

1. Niech S będzie multizbiorem $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, gdzie a_n jest liczbą n -kombinacji S przy podanych warunkach
 - (i) każdy element występuje nieparzystą ilość razy;
 - (ii) każdy element występuje liczbę razy podzielną przez 3;
 - (iii) element e_1 nie pojawia się, a e_2 pojawia się co najwyżej raz;
 - (iv) element e_1 pojawia się 1, 3 lub 11 razy, natomiast element e_2 pojawia się 2, 4 lub 5 razy;
 - (v) każdy element pojawia się przynajmniej 10 razy.
2. Rozważmy wielkości a_n, b_n, c_n, d_n , wyznaczające na ile sposobów można wydać n gr za pomocą monet
 - (a) 1gr ;
 - (b) 1gr i 2gr;
 - (c) 1gr, 2gr, 5gr;
 - (d) 1gr, 2gr, 5gr; 10gr.Obliczyć a_n i b_n . Podać rekurencyjne wzory na c_n i d_n . Dla każdego ciągu wyznaczyć jego funkcję tworzącą.
3. Jak wiemy $1 + x + x^2 + \dots = 1/(1 - x)$. Zauważyć, że $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ można wyliczyć rozważając $f(x) - xf(x)$.
4. Niech $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 1/(1 + x + x^2)$. Obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu a_n .
5. Znaleźć funkcję tworzącą ciągu liczb $1, q, q^2, q^3, \dots$.
6. Znaleźć funkcje tworzące (w zwartej postaci) dla podanych ciągów
 - (i) $1, q, q^2, q^3, \dots$;
 - (ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$;
 - (iii) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \dots, (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \dots$ ($\alpha \in \mathbb{R}$);
 - (iv) $0, 0, 0, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$;
 - (v) $5, 6, 7, 8, \dots, n + 5, \dots$;
 - (vi) $1/0!, 1/1!, 1/2!, \dots, 1/n!, \dots$;
 - (vii) $1/0!, -1/1!, 1/2!, \dots, (-1)^n/n!, \dots$;
 - (viii) $1, 3, 4, 9, 8, 27, 16, 81, \dots$;
 - (ix) $1, 2, 4, 1, 3, 8, 1, 4, 16, 1, 5, 32, \dots$

7. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu kolejnych kwadratów liczb naturalnych $0, 1, 4, \dots, n^2, \dots$.

WSKAZÓWKA: Szukamy prostego wzoru na $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$, gdzie $a_n = n^2$. Warto obliczyć $f(x) - xf(x)$. Z kolei $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = (x + x^2 + x^3 + \dots) + (x^2 + 2x^3 + \dots)$. Podobną metodę można stosować poniżej.

8. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu kolejnych sześcianów liczb naturalnych $0, 1, 8, \dots, n^3, \dots$.
9. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{2}$, $n \geq 0$.
10. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{3}$, $n \geq 0$.
11. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{k}$, $n \geq 0$, dla ustalonej liczby naturalnej k .
12. Niech $F(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots$. Wyznaczyć (w zależności od $F(x)$) funkcję tworzącą ciągów $b_n = na_n$ i $c_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

FUNKCJE TWORZĄCE I REKURENCJE

13. Rozwiązać zadania GAL 46-52.

DODATEK: ZBIEŻNOŚĆ SZEREGÓW POTĘGOWYCH

14. Szeregu potęgowy $\sum_n a_n x^n$ zmiennej rzeczywistej jest zbieżny dla $|x| < R$ i rozbieżny dla $|x| > R$, gdzie R (promień zbieżności szeregu) wyliczamy ze wzoru $1/R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (może wyjść $R = +\infty$).
 Udowodnić to proste twierdzenie: o granicy górnej wystarczy wiedzieć, że warunek $\limsup_n c_n < \gamma$ oznacza że dla $\varepsilon > 0$, nierówność $c_n < \gamma + \varepsilon$ zachodzi dla prawie wszystkich n . Jeżeli więc $|x| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ to dla pewnego $q < 1$ nierówność $|a_n x^n| \leq q^n$ zachodzi dla prawie wszystkich n .
15. Zauważyć, że jeżeli R jestm promieniem zbieżności $f(x) = \sum_n a_n x^n$ i $0 < r < R$ to szereg jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[-r, r]$. Można stąd wywnioskować, że $f'(x) = \sum_n na_n x^{n-1}$.