

GRAFY PLANARNE

Uwaga: Zadania pochodzą częściowo ze zbioru Ś. Gala. Poniżej $\#A$ oznacza moc zbioru skończonego A . Inne dowody wzoru Eulera (i wskazówki do niektórych zadań) można znaleźć na stronie

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

Niech (V, E) będzie grafem. Załóżmy, że graf ten jest zrealizowany na płaszczyźnie (mówimy, że jest on *grafem planarnym*). Niech F oznacza zbiór ścian, to znaczy obszarów, na jakie graf dzieli płaszczyznę, wliczając w to nieograniczony obszar wokół grafu. Chcemy pokazać, że dla dowolnego (skończonego) planarnego grafu zachodzi

Wzór Eulera $\#V - \#E + \#F = 2$.

1. *Drzewem rozpinającym* w grafie (V, E) nazwiemy podgraf (V, E') który jest drzewem. Pokaż, że każdy graf spójny posiada drzewo rozpinające.

Grafem dualnym do grafu planarnego (V, E) (wyznaczającego zbiór ścian F) nazwiemy graf (F, E) , gdzie rozumiemy, że każda krawędź łączy obszary, które rozdziela.

Inaczej mówiąc, można utożsamić każdą ścianę $f \in F$ z pewnym punktem p_f do niej należącym i połączyć krawędziami te pary p_f i p_g , dla których ściany f i g mają wspólną krawędź w wyjściowym grafie. Warto poprobować na rysunku.

2. Pokaż, że jeśli (V, E') jest drzewem rozpinającym w (V, E) to $(F, E \setminus E')$ jest drzewem rozpinającym w grafie dualnym (F, E) . Wywnioskuj stąd formułę Eulera.
3. Niech P będzie wielościannem ustawionym w przestrzeni tak, by żadna krawędź nie była pozioma. Dla każdej ściany f niech (V_f, E_f, F_f) oznacza trójkę składającą się z wierzchołków i krawędzi po lewej stronie ściany f (pomiędzy najwyższym i najniższym wierzchołkami, ale bez nich), oraz $F_f = \{f\}$. Zauważ, że $\#V_f - \#E_f + \#F_f = 0$ oraz, że wszystkie powyższe zbiory dla różnych ścian są rozłączne. Wywnioskuj stąd formułę Eulera.
4. Załóżmy, że graf planarny ma krawędzie będące odcinkami. Policz sumę kątów na dwa sposoby: sumując po ścianach i po wierzchołkach. Wywnioskuj stąd formułę Eulera.
5. Przedyskutuj, co się dzieje jeśli krawędzie powyższego grafu są łamanymi lub gładkimi krzywymi.
6. Udowodnij wzór Picka: Niech P będzie wielokątem o całkowitych współrzędnych na płaszczyźnie. Wtedy pole P jest równe

$$\#(\mathbb{Z}^2 \cap P) - \#(\mathbb{Z}^2 \cap \partial P)/2 - 1.$$

Tutaj ∂P oznacza brzeg wielokąta.

7. Załóżmy, że graf planarny ma krawędzie będące odcinkami i wierzchołki o wymiernych współrzędnych. Oblicz pole dopełnienia zewnętrznego obszaru na dwa sposoby. Wywnioskuj stąd formułę Eulera.

8. Niech X będzie podzbiorem $\mathbb{R}^2$. Niech $p_X(n) = \#(\mathbb{Z}^2 \cap nX)$. Pokaż, że jeśli X jest wielokątem o całkowitych współrzędnych wierzchołków na płaszczyźnie to $p_X(n)$ jest wielomianem (zwanym *Wielomianem Eckharta*).
9. Załóżmy, że w grafie planarnym (V, E) istnieje droga Eulera $\{v_i\}_{i=0}^{\#E}$. Znajdź bijekcję, między $\{i : \exists_{j < i} v_i = v_j\}$ a niezewnętrznymi ścianami. Wywnioskuj stąd formułę Eulera.
10. Dla dowolnego wielościanu wypukłego wielkość

$$\text{liczba wierzchołków} - \text{liczba krawędzi} + \text{liczba ścian}$$

jest stała i wynosi 2. Dlaczego?

11. Pokaż, że graf pełny K_5 (pięć wierzchołków połączonych wszystkimi $\binom{5}{2}$ krawędziami) nie jest planarny.
12. Pokaż, że pełny graf dwudzielny $K_{3,3}$, zdefiniowany jako

$$(\{1, 2, \dots, 6\}, \{\{a, b\} : a < 7/2 < b\}),$$

nie jest planarny.

13. Pokaż, że każdy graf planarny zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej pięć.
14. Udowodnij

Twierdzenie o pięciu barwach: *Wierzchołki dowolnego grafu planarnego można pokolorować (co najwyżej) pięcioma kolorami, tak aby każde dwa sąsiadujące wierzchołki miały różne kolory.*

WSKAZÓWKA: Załóż indukcyjnie, że po usunięciu wierzchołka stopnia co najwyżej pięć graf można pokolorować.