

## SYSTEMY RÓŻNYCH REPREZENTANTÓW (SRR)

Przypomnijmy, że ponumerowana rodzina zbiorów  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  ma system różnych reprezentantów (SSR), zwany też transversalą, jeżeli istnieją **różne** punkty  $x_1, \dots, x_n$ , takie że  $x_i \in A_i$  dla każdego  $i \leq n$ .

1. Niech  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  będzie rodziną zbiorów, posiadającą SRR. Niech  $x$  będzie elementem z  $A_1$ . Pokazać, że istnieje SRR zawierający  $x$ ; pokazać na przykładzie, że może nie istnieć SRR, w którym  $x$  reprezentuje  $A_1$ .
2. Niech  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  będzie rodziną zbiorów spełniającą silniejszy Warunek Halla

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| \geq k + 1,$$

dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n$  i dowolnego wyboru  $k$  różnych indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Niech  $x$  będzie elementem z  $A_1$ . Pokazać, że  $\mathcal{A}$  ma SRR, w którym  $x$  reprezentuje  $A_1$ .

3. Pokazać, że rodzina zbiorów

$$A_i = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

posiada SRR oraz liczba różnych SRR jest równa  $n$ -tej liczbie nieporządków  $D_n$ .

4. Udowodnić, że jeżeli każdy zbiór z rodziny  $\mathcal{A}$  ma  $\geq d$  elementów, a każdy punkt należy do co najwyżej  $d$  zbiorów z  $\mathcal{A}$  (gdzie  $d > 0$  jest ustalone) to taka rodzina ma SRR
5. Udowodnić, że rodzina  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  niepustych podzbiorów skończonego zbioru  $X$  ma SRR wtedy i tylko wtedy gdy  $|\{i : A_i \subseteq Y\}| \leq |Y|$  dla każdego  $Y \subseteq X$ .
6. Po rozgrywce brydżowej talia 52 kart jest podzielona na 13 lew po 4 karty. Udowodnić, że można z każdej lewy wybrać po jednej karcie, tak aby otrzymać wszystkie figury  $2, 3, \dots, 10, W, D, K, A$  (bez uwzględniania kolorów).

## KOJARZENIE PAR W GRAFACH DWUDZIELNYCH

7. Przypomnieć sobie, że inną postacią twierdzenia Halla jest twierdzenie o kojarzeniu par w grafach dwudzielnych  $G = (S, T, E)$ .
8. Dla grafu dwudzielnego  $G = (S, T, E)$  przypomniany poniżej algorytm etykietujący pozwala ustalić, czy dla danego kojarzenia par  $M \subseteq E$  istnieje łańcuch alternujący. Poćwiczyć na wybranym przykładzie!

- (i) nadaj etykietę (\*) tym wierzchołkom z  $S$ , które nie mają pary w  $M$ ;
- (ii) jeśli  $s_i \in S$  dostał w poprzednim ruchu etykietę, nadaj etykietę  $(s_i)$  tym wierzchołkom z  $T$ , które są połączone krawędzią **spoza**  $M$  i dotychczas nie miały etykiety;
- (iii) jeśli  $t_i \in T$  dostał w poprzednim ruchu etykietę, nadaj etykietę  $(t_i)$  tym wierzchołkom z  $S$ , które są połączone krawędzią **z**  $M$  i nie miały etykiety.

Kiedy następuje przełom (znaleźliśmy łańcuch alternujący), a kiedy przełomu nie ma?

9. Wyprowadzić twierdzenie Halla z twierdzenia Königa-Egerváry'ego: W grafie dwudzielnym maksymalne kojarzenie jest równe minimalnej mocy zbioru blokującego.
10. Zauważyć, że jeśli w grafie  $G = (S, T, E)$  stopień każdego wierzchołka z  $S$  jest nie mniejszy niż stopień dowolnego wierzchołka z  $T$  to w  $G$  istnieje kojarzenie maksymalne.
11. Dana jest szachownica  $m \times n$ , w której niektóre pola są zakazane (na przykładzie zaznaczone krzyżykami). Zadanie polega na umieszczeniu maksymalnej liczby niezależnych pionków; pionki są niezależne jeśli żadne dwa nie stoją w tej samej kolumnie i tym samym wierszu. Zauważyć, że jest to inna wersja zagadnienia kojarzenia w grafie dwudzielnym. W związku z tym dla danego ustawienia etykietowanie wygląda następująco (dlaczego?):

- (a) Nadajemy etykiety  $(-)$  wierszom bez pionków;
- (b) dla danego wiersza  $i$  z etykietą nadajemy etykietę  $(i)$  tym kolumnom, które na przecięciu z tym wierszem mają dopuszczalne pole wolne;
- (c) dla danej kolumny  $j$  z etykietą nadajemy etykietę  $(j)$  tym wierszom, które na przecięciu mają pionek; wracamy do (b).

Przykładowy zestaw do ćwiczeń:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | × | × |   |   |   |   | 1 |
|   | × | × | × | × | ○ | × | 2 |
|   | ○ | × | × |   |   |   | 3 |
| × |   | × | × | × |   | × | 4 |
|   |   | × | × | × | × | × | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |   |

12. **Wąskie gardło.** Mamy  $n$  pracowników i  $n$  stanowisk pracy. Pracownik  $i$  osiąga wydajność  $a_{ij}$  pracując na stanowisku  $j$ . Szukamy takiej permutacji  $\sigma$ , która maksymalizuje wielkość

$$v(\sigma) = \min_{k \leq n} a_{k\sigma(k)}.$$

Zauważyć, że taki problem pojawia się gdy ustawiamy pracowników na taśmie montażowej — jej wydajność zależy od wydajności najgorszej.

Dla danej permutacji  $\sigma$  rozważamy szachownicę  $n \times n$ . Pole  $(i, j)$  uznajemy za dopuszczalne gdy  $a_{ij} > v(\sigma)$  i niedopuszczalne w przeciwnym razie. Zauważyć, że  $\sigma$  nie jest optymalna tylko wtedy gdy na tej szachownicy można ustawić  $n$  niezależnych pionków.

13. Zoptymalizować prace 6 pracowników przy podanej poniżej tabeli wydajności rozpoczynając od przypadkowej permutacji.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 6 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 8 | 3 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 5 | 0 | 9 |
| 3 | 5 | 4 | 8 | 8 | 3 |
| 2 | 6 | 9 | 5 | 2 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 6 | 7 | 1 |