

1. **Zagadnienie optymalnego drzewa rozpinającego.** Dany jest graf spójny $G = (N, E)$ i funkcja $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, przypisująca krawędziom koszty (na przykład ich umowną długość, koszt podróży etc.). Szukamy takiego drzewa rozpinającego $T = (N, E')$ dla grafu G , które jest *optymalne*, minimalizuje wielkość

$$C(T) := \sum_{e \in E'} c(e).$$

Niech $|N| = n$. Najprostszy algorytm działa następująco: Wybierz $e_1 \in E$ o najmniejszym koszcie. Ogólnie, dla danych $\{e_1, \dots, e_i\}$, gdzie $i < n - 1$, wybierz $e_{i+1} \in E$, tak że zbiór krawędzi $\{e_1, \dots, e_{i+1}\}$ nie zawiera cyklu i jest to najtańszy wybór w tym momencie.

Dlaczego po $n - 1$ kroku otrzymamy drzewo rozpinające?

Udowodnić, że algorytm faktycznie wyznacza drzewo rozpinające o minimalny koszcie.

WSKAZÓWKA: Załóżmy, że drzewo T daje najmniejszy koszt, a nasz algorytm wyznaczył drzewo T_0 . Niech e_{i+1} będzie pierwszą krawędzią T_0 , która nie jest krawędzią T . Zauważyć (jak w lemacie o wymianie krawędzi w drzewach), że można w T_0 wymienić e_{i+1} na pewną krawędź f z drzewa T o tym samym koszcie.

2. Udowodnić, że jeżeli funkcja kosztów jak wyżej jest różnowartościowa to w grafie istnieje tylko jedno optymalne drzewo rozpinające.
3. **Gra Shannona.** Dany jest graf spójny $G = (N, E)$ i ustalone są dwa wierzchołki $p, k \in N$. Przypomnijmy, że grę rozpoczyna gracz ‘negatywny’ (czyli szeryf Tommy Lee Jones), zaznaczając jedną krawędź znakiem ‘-’. Następnie gracz ‘pozytywny’ (czyli uciekinier Harrison Ford) zaznacza inną krawędź znakiem ‘+’. I tak na przemian, przy czym każda krawędź może być zaznaczona tylko raz. Na koniec, albo istnieje droga z p do k krawędziami z ‘+’ i pierwszy gracz wygrywa (może uciec), albo wygrywa drugi gracz (złapał uciekiniera).

Założmy, że w G istnieją dwa drzewa rozpinające $T(0)$ i $S(0)$ o rozłącznych zbiorach krawędzi. Wtedy pierwszy gracz ma strategię wygrywającą (wspomnianą na wykładzie). Po krótko: jeśli drugi gracz zaznaczy krawędź z $T(0)$ to (jak w lemacie o wymianie krawędzi w drzewach) wymieniamy $T(0)$ i $S(0)$ na dwa drzewa rozpinające $T(1)$ i $S(1) = S(0)$, mające jedną krawędź wspólną, zaznaczając ją ‘+’. Dalej analogicznie.

Zobaczyć na przykładach, że to działa i wyjaśnić, dlaczego.

ZAGADNIENIE MAKSYMALNEGO PRZEPŁYWU

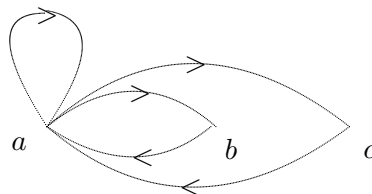
4. Algorytm Forda-Fulkersona zaczyna się od ustalonego przepływu, na przykład zerowego. Następnie wykonuje pętlę:
- (i) dla danego przepływu $x = (x_a)_{a \in A}$ szukaj ścieżek wzmacniających;
 - (ii) jeżeli P jest ścieżką wzmacniającą to ‘przepchnij’ przez nią $\delta = \delta(P)$, gdzie $\delta > 0$ jest tak obliczona, że $x_a + \delta \leq v_a$ dla łuków $a \in P$ do przodu i $\delta \leq x_a$ dla łuków $a \in P$ do tyłu. Zamień przepływ x na uzyskany w ten sposób przepływ $\tilde{x}$ i idź do (i).
 - (iii) Jeżeli nie ma ścieżek wzmacniających to x jest maksymalnym przepływem. Stop.

Algorytm szukania ścieżek wzmacniających będzie podany na następnym wykładzie. Warto sprawdzić na wybranym przykładzie, jak to działa!

5. Zauważyć, że następujące zagadnienia sprowadzają się, poprzez odpowiednią modyfikację grafu, do znalezienia maksymalnego przepływu w grafie skierowanym o jednym źródle i jednym odpływie
 - (a) Zagadnienie największego przepływu w sieci o wielu źródłach i wielu odpływach,
 - (b) Maksymalny przepływ w grafie niezorientowanym: Dany jest graf niezorientowany $G = (N, E)$ i przepustowości krawędzi $u_{\{i,j\}}$ dla $\{i,j\} \in E$ (tutaj przepływ może się odbywać w każdą stronę). Szukamy znowu maksymalnego przepływu pomiędzy ustalonym s i t .
 - (c) W danym grafie skierowanym $G = (N, A)$ o ustalonym źródle i odpływie wprowadzamy przepustowości wierzchołków $u(i), i \in N$. Zagadnienie polega na znalezieniu maksymalnego przepływu przy takim ograniczeniu. WSKAZÓWKA: Z KAŻDEGO WIERZCHOŁKA ZROBIĆ DWA.
6. **Algorytm FF w grafach dwudzielnych** znajduje maksymalne kojarzenie par: Dla danego (nie-skierowanego) grafu dwudzielnego $G = (S, T, E)$ rozważamy odpowiedni graf skierowany, dodając źródło s i odpływ t i odpowiednio ustalając przepustowość łuków. Sprawdzić, jak w terminologii FF można zinterpretować łańcuch alternujący i blokujący zbiór wierzchołków w G .

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

7. Dla grafu skierowanego podanego niżej wyznaczyć liczbę różnych skierowanych dróg składających się z n krawędzi, zaczynających się w a i kończących się w c . (Uwaga: w tym grafie skierowanym, wyjątkowo, jest pętla (a, a)).



8. **Twierdzenie Caley'a:** W pełnym grafie K_n (n rozróżnialnych wierzchołków i wszystkie możliwe krawędzie) jest n^{n-2} drzew rozpinających. Łatwo znaleźć różne dowody twierdzenia, na przykład WIKIPEDIA opisuje tak zwany kod Prüfera (bijekcję pomiędzy drzewami rozpinającymi w K_n a ciągami z $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Kod_Pr%C3%BCfera

Patrz też

<https://arxiv.org/pdf/0908.2324.pdf>