

NIESKOŃCZONE TWIERDZENIE RAMSEYA

1. Wykazać, że każdy ciąg $x_n \in \mathbb{R}$ zawiera podciąg stały, podciąg rosnący lub podciąg malejący.
2. Wykazać, że dla dowolnej skończonej rodziny funkcji $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, na którym wszystkie te funkcje są monotoniczne w słabym sensie.
3. Każdy nieskończony zbiór częściowo uporządkowany zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.
4. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będą zbiorami takimi że $|A_n \triangle A_k| \geq 7$ dla $n \neq k$. Udowodnić, że istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \dots$, taki że
 - (i) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geq 4$ dla wszystkich $i > j$, lub
 - (ii) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geq 4$ dla wszystkich $i < j$.

SKOŃCZONE TWIERDZENIA RAMSEYA

5. Krawędzie grafu pełnego K_6 pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt.
6. Pokazać na przykładzie, że powyższe nie jest prawdziwe dla grafu K_5 .
7. Krawędzie grafu K_{17} pokolorowano trzema kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt.
8. Ogólniej piszemy $R(i, j) = n$ gdy n jest najmniejszą liczbą, taką że przy dowolnym kolorowaniu krawędzi grafu K_n istnieje pełny podgraf K_i pierwszego koloru lub pełny podgraf K_j koloru drugiego. Warto (próbować) zmierzyć się z wynikami podanymi poniżej (za WIKIPEDIĄ):

Liczba	Wartość	Odkrywca, rok
$R(3, 3)$	6	Greenwood i Gleason, 1955
$R(3, 4)$	9	Greenwood i Gleason, 1955
$R(3, 5)$	14	Greenwood i Gleason, 1955
$R(4, 4)$	18	Greenwood i Gleason, 1955
$R(3, 6)$	18	Kery, 1964
$R(3, 7)$	23	Kalbfleisch, 1966
$R(3, 8)$	28	Graver i Yachel, 1968
$R(3, 9)$	36	McKay i Zhang Ke Min, 1992
$R(4, 5)$	25	McKay i Radziszowski, 1995

9. W tej notacji (dla trzech kolorów) zadanie 7 oznacza, że $R(3, 3, 3) = 17$. Jak twierdzi WIKIPEDIA, nie wiadomo czy $R(3, 3, 4) = 30$ czy też 31. Może nam się uda:-)
10. Udowodnić, że istnieje liczba n taka że wśród dowolnych n punktów płaszczyzny, z których żadne 3 nie są współliniowe, można wybrać 5 tworzących wypukły pięciokąt.
11. Udowodnić, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje $S(r)$ (liczba Schura), to jest taka liczba naturalna, że dla dowolnego kolorowania elementów z $A = \{1, 2, \dots, S(r)\}$ istnieją trzy elementy $x, y, z \in A$ tego samego koloru, spełniające równanie $x + y = z$.

WSKAZÓWKA: Patrz 3.1 w <http://math.uchicago.edu/~may/REUDOCs/Steed.pdf>