

1. Obliczyć sumy przedziałów na prostej

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \quad \text{gdzie} \quad a_{n+1} \leq a_n < b_n \leq b_{n+1}.$$

2. Obliczyć przekroje przedziałów na prostej $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, gdzie $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$.
3. Wykazać, że przedział $[0, 1]$ nie jest (nawet nieskończoną) sumą przedziałów postaci (a, b) ; podobnie $(0, 1)$ nie jest przekrojem przedziałów postaci $[a, b]$.
4. Pokazać na przykładach, że przekrój przeliczalnej ilości zbiorów otwartych nie musi być otwarty; podobnie suma przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych nie jest na ogół domknięta.
5. Rozważmy $\mathbb{R}$ z topologią naturalną.

- (i) Sprawdzić, że jeśli $\lim_n x_n = \infty$ to zbiór $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ jest domknięty.
- (ii) Sprawdzić, że jeśli $\lim_n x_n = x \in \mathbb{R}$ to zbiór $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy $x \in A$, natomiast zbiór $A \cup \{x\}$ jest zawsze domknięty.
- (iii) Sprawdzić, że $A \subseteq \mathbb{R}$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy z faktu że $x_n \in A$ i $x = \lim x_n$ wynika że $x \in A$.

6. Podać przykłady, świadczące o tym, że obraz zbioru otwartego przez funkcję ciągłą nie musi być otwarty i obraz zbioru domkniętego przez funkcję ciągłą nie musi być domknięty.
7. Dla zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy jego domknięcie $\bar{A}$ jako zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których $(x - \delta, x + \delta) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $\delta > 0$. Sprawdzić, że operacja domknięcia ma następujące własności:

- (i) $\bar{\bar{A}} = \bar{A} \supseteq A$;
(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
(iii) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$;
(iv) $\overline{A \setminus B} \subseteq \bar{A} \setminus \bar{B}$;

dla dowolnych $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Pokazać na przykładzie, że inkluzje mogą być właściwe.

8. Wykazać, że zbiór $\bar{A}$ jest domknięty dla każdego $A \subseteq \mathbb{R}$. Ponadto, $\bar{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A , to znaczy jeżeli zbiór F jest domknięty i $A \subseteq F$ to $\bar{A} \subseteq F$.

PROBLEMY

- A. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny przedziałów postaci $[a_t, b_t)$, $t \in T$ istnieje przeliczalny zbiór $T_0 \subseteq T$, taki że

$$\bigcup_{t \in T} [a_t, b_t) = \bigcup_{t \in T_0} [a_t, b_t).$$

- B. Niech $q_1, q_2, \dots$ będzie ciągiem zawierającym wszystkie liczby wymierne. Udowodnić, że

$$V = \bigcup_n (p_n - 1/2^n, p_n + 1/2^n) \neq \mathbb{R}.$$

W istocie zbiór $\mathbb{R} \setminus V$ jest mocy continuum (choć jest domknięty i nie zawiera niepustych przedziałów).