

NORMY I METRYKI

Norma w przestrzeni liniowej X to funkcja $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$, taka że dla dowolnych $x, y \in X$ i liczby a

$$N(1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$N(2) \quad \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|,$$

$$N(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Metryka w (dowolnej) przestrzeni X to funkcja $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, spełniająca dla wszystkich $x, y, z \in X$

$$M(1) \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$M(2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

$$M(3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

1. Sprawdzić, że $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ są normami na $\mathbb{R}^d$, gdzie dla $x = (x(1), \dots, x(d)) \in \mathbb{R}^d$

$$\|x\|_1 = \sum_{i \leq d} |x(i)|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i \leq d} |x(i)|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i \leq d} |x(i)|.$$

2. Sprawdzić, że norma $\|\cdot\|$ na przestrzeni liniowej X zadaje w tej przestrzeni metrykę ρ wzorem $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Zauważyć, że taka metryka jest *niezmiennicza na przesunięcia*: $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ dla $x, y, z \in X$.

Przestrzenia euklidesową nazywamy przestrzeń $\mathbb{R}^d$ (dla pewnej liczby naturalnej d) z metryką euklidesową, to jest z metryką wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_2$.

3. Sprawdzić, że wzór $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ określa normę w przestrzeni $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na $[0, 1]$.
4. Sprawdzić, że wzór $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$ także określa normę w przestrzeni $C[0, 1]$.
5. Sprawdzić, że wzór $\|f\| = |f(0)| + \sup_x |f'(x)|$ określa normę w przestrzeni $C^1[0, 1]$, funkcji mających ciągłą pochodną.
6. W przestrzeni metrycznej (X, ρ) rozważamy kule “otwarte” postaci $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$. Sprawdzić, że jeżeli $B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$ to $\rho(x, y) < r + s$. Sprawdzić też, że implikacja przeciwna jest prawdziwa w przestrzeniach euklidesowych, ale nie musi zachodzić w dowolnej przestrzeni metrycznej.
7. Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest otwarty jeżeli dla każdego $x \in A$ istnieje $r > 0$, takie że $B_r(x) \subseteq A$. Sprawdzić, że kula $B_r(x)$ jest otwarta, a sfera postaci $\{y : \rho(x, y) = r\}$ jest zbiorem domkniętym.

8. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ rośnie gęsta dżungla, przez którą płynie rzeka $y = 0$. Podróżowanie pomiędzy punktami o różnych pierwszych współrzędnych odbywa się tak, że idziemy prosto do rzeki, płyniemy rzeką i następnie zmierzamy do celu prostopadle do rzeki.

Napisać wzór na metrykę *rzeka* mierzącą odległości w dżungli i narysować przykładowe kule w tej metryce. Zauważyć, że metryka *rzeka* nie jest zadana przez żadną normę.

BRZEG, WNĘTRZE, DOMKNIĘCIE

9. W przestrzeni metrycznej (X, ρ) definiujemy domknięcie $\bar{A}$ zbioru $A \subseteq X$ jako zbiór tych $x \in X$, dla których $B_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego promienia $\delta > 0$. Zbadać, czy zawsze $\overline{B_r(x)} = \{y : \rho(x, y) \leq r\}$.
10. W przestrzeni metrycznej (X, ρ) definiujemy wnętrze $\text{Int } A$ zbioru $A \subseteq X$ przez warunek $x \in \text{Int } A$ wtedy i tylko wtedy gdy $B_\delta(x) \subseteq A$ dla pewnego $\delta > 0$. Sprawdzić, że operacja wnętrza $\text{Int } A$ ma własności
- (i) $\text{Int } X = X$;
 - (ii) $\text{Int } A \subseteq A$;
 - (iii) $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$;
 - (iv) $\text{Int } (\text{Int } (A)) = \text{Int } A$.
11. Udowodnić, że $\text{Int } (F \cup \text{Int } (A)) = \text{Int } (F \cup A)$ przy założeniu że zbiór F jest domknięty.
12. W przestrzeni metrycznej X brzeg $\text{Fr } A$ zbioru A można zdefiniować przez warunek $x \in \text{Fr } A$ jeśli $B_\delta(X) \cap A \neq \emptyset \neq B_\delta(x) \setminus A$ dla każdego $\delta > 0$. Sprawdzić następujące zależności (i pokazać na przykładzie, że inkluzje mogą być właściwe)
- (i) $\text{Int } A = A \setminus \text{Fr } A$;
 - (ii) $\bar{A} = A \cup \text{Fr } A$;
 - (iii) $\text{Fr } (A \cup B) \subseteq \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
 - (iv) $\text{Fr } A = \text{Fr } (X \setminus A)$;
 - (v) $\text{Fr } (\bar{A}) \subseteq \text{Fr } A$;
13. Dla podanych podzbiorów prostej rzeczywistej wyznaczyć ich wnętrze, domknięcie i brzeg:

$$\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, [0, 1), (0, \infty), (0, 1) \cap \mathbb{Q}.$$

14. Na płaszczyźnie euklidesowej wyznaczyć wnętrze, brzeg i domknięcie zbiorów

- (i) $A = \{\langle x, y \rangle : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
- (ii) $B = \mathbb{R} \times \{0\}$;
- (iii) $C = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
- (iv) $D = \{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (v) $E = \{\langle x, y \rangle : y = x^2\}$.

PROBLEMY

- A. Udowodnić, że dla dowolnej (rzeczywistej) liczby $p > 1$ wzór $\|x\|_p = \left(\sum_{i \leq d} |x(i)|^p\right)^{1/p}$ definiuje normę na $\mathbb{R}^d$ (por. Zadanie 1). Sprawdzić, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
- WSKAZÓWKA: w sprawie nierówności trójkąta trzeba będzie zajrzeć do książki z analizy.
- B. Niech $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ będzie wyposażona w metrykę $\rho(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Udowodnić, że w X istnieje nieprzeliczalna rodzina parami rozłącznych kul o promieniu $1/2$.