

RÓŻNE RODZAJE CIĄGŁOŚCI

1. Niech (X_1, ρ_1) i (X_2, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Jednostajną ciągłość funkcji $f : X_1 \rightarrow X_2$ definiujemy, oczywiście, przez warunek

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, x' \in X_1) \rho_1(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Taka funkcja spełnia warunek Lipschitza jeżeli istnieje stała $L > 0$, taka że dla dowolnych $x, x' \in X_1$ zachodzi nierówność

$$\rho_2(f(x), f(x')) \leq L \cdot \rho_1(x, x').$$

Zauważyć, że warunek Lipschitza implikuje jednostajną ciągłość, a jednostajna ciągłość pociąga za sobą ciągłość, ale implikacje przeciwne nie muszą zachodzić.

2. Zbadać czy jednostajna ciągłość i warunek Lipschitza zachowują się przy składaniu funkcji.
 3. Zbadać, czy jednostajna ciągłość funkcji $X \rightarrow \mathbb{R}$ zachowuje się przy dodawaniu i mnożeniu funkcji.
 4. Zbadać, czy warunek Lipschitza funkcji $X \rightarrow \mathbb{R}$ zachowuje się przy dodawaniu i mnożeniu funkcji.
 5. Zauważyć, że każda funkcja linowa $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wywnioskować stąd, że każde odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest ciągłe.
 6. Udowodnić, że każde odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ spełnia warunek Lipschitza.
- WSKAZÓWKA: A jest funkcją ciągłą więc $x \rightarrow \|Ax\|_2$ jest funkcją ciągłą. Sprawdzić, że stała $L = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\}$ jest dobrze określona i działa prawidłowo.
7. Udowodnić, że wyznacznik macierzy $n \times n$ jest funkcją ciągłą $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$.
 8. Udowodnić, że dla funkcji $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:

(i) funkcja f jest jednostajnie ciągła;

(ii) funkcja f przedłuża się do ciągłej funkcji $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

WSKAZÓWKA: $\tilde{f}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; granica istnieje gdy f jest ciągła jednostajnie.

PROBLEMY

- A. Rozważamy $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową ρ . Dla $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\varepsilon > 0$ niech A_ε będzie ε otoczką A , czyli zbiorem $x \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $\rho(x, A) < \varepsilon$.

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną wszystkich niepustych domkniętych i ograniczonych podzbiorów $\mathbb{R}^2$. Dla $A, B \in \mathcal{C}$ definiujemy metrykę Hausdorffa wzorem

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B_\varepsilon \text{ oraz } B \subseteq A_\varepsilon\}.$$

Sprawdzić, że H jest faktycznie metryką na $\mathcal{C}$. Udowodnić, że przestrzeń $(\mathcal{C}, H)$ jest ośrodkowa.