

1. Sprawdzić, że jeżeli $x_n \rightarrow x_0$ w przestrzeni (X, ρ) to $K = \{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem zwartym.
2. Sprawdzić, że suma skończenie wielu zwartych podzbiorów danej przestrzeni jest zwarta.
3. Dla $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy sumę kompleksową $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Sprawdzić, że

- (i) $C + C = [0, 2]$ dla trójkowego zbioru Cantora C ;
- (ii) jeżeli A jest otwarty to zbiór $A + B$ też jest otwarty dla dowolnego B ;
- (iii) jeżeli zbiór A jest zwarty, a B domknięty to zbiór $A + B$ jest domknięty.
- (iv) jeżeli A, B są zwarte to ich suma kompleksowa $A + B$ też jest zwarta.

Podać przykład zbiorów domkniętych, których suma kompleksowa nie jest domknięta

4. Udowodnić, że jeżeli A jest domkniętym, a B zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, ρ) i $A \cap B = \emptyset$, to istnieje $\varepsilon > 0$, takie że $\rho(a, b) \geq \varepsilon$ dla dowolnych $a \in A, b \in B$.
5. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń X jest zwarta i $F_n \subseteq X$ są jej domkniętymi podzbiarami, takimi że $\bigcap_{i \leq n} F_i \neq \emptyset$ dla każdego n , to $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Wynioskować stąd, że jeżeli (dla zbiorów jak wyżej) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq U$ dla otwartego zbioru $U \subseteq X$ to $\bigcap_{i \leq n} F_i \subseteq U$ dla pewnego n .

6. Z jakich twierdzeń wynika że podzbiór przestrzeni euklidesowej jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięty i ograniczony?
7. Sprawdzić, czy poniższe podbiory $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$ są domknięte i czy są zwarte:

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 2019\}$;
- (ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 \leq 2019\}$;
- (iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{xy}{x^2+y^2} < 2/3, y \leq 1\}$;
- (iv) $D = \{(1 - 1/n, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \dots\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$;
- (v) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

8. Pomyśleć o różnych przykładach zbiorów w przestrzeniach metrycznych, które są domknięte i ograniczone, ale nie są zwarte.
9. Niech funkcja $f_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f_t(x) = \sin 2\pi tx$. Zbadać zwartość podzbiorów $A = \{f_t : t \in [0, 1]\}$ i $B = \{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką zbieżności jednostajnej.
10. Udowodnić, że jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną zwartą, to każda ciągła funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła jednostajnie, to znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ dla dowolnych $x, x' \in X$ spełniających warunek $\rho(x, x') < \delta$.

WSKAZÓWKA. Dowód wprost: zastosować pokryciową definicję zwartości.

Dowód nie wprost: zdefiniować dwa ciągi i skorzystać z ciągowej charakterystyki zwartości.

11. Udowodnić, że jeżeli zbiór funkcji $A \subseteq C[0, 1]$ jest zwarty (w metryce zbieżności jednostajnej) to A jest *jednakowo ciągły* w każdym punkcie $x \in [0, 1]$, co oznacza, że

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in A)(\forall x')|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

PROBLEMY

- A. **Przestrzeń Hilberta ℓ_2 .** Niech ℓ_2 będzie przestrzenią wszystkich ciągów $x = (x(n))_n$ liczb rzeczywistych, takich że $\sum_n x(n)^2 < \infty$. Sprawdzić, że ℓ_2 jest przestrzenią liniową i że wzór $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_n x(n)^2}$ definiuje normę na ℓ_2 .

Zauważyć, że ‘kula domknięta’ $B = \{x \in \ell_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ nie jest zbiorem zwartym w tej przestrzeni (w metryce wyznaczonej przez $\|\cdot\|_2$), natomiast zbiór

$$A = \{x \in \ell_2 : |x(n)| \leq 1/n \text{ dla każdego } n\}$$

jest zwarty.

- B. Udowodnić **Twierdzenie Arzeli-Ascolego**, por. zadanie 11.

Twierdzenie. Jeżeli zbiór $A \subseteq C[0, 1]$ jest domknięty, ograniczony i jednakowo ciągły to jest zwarty.