

1. Sprawdzić, że jeżeli ciąg (x_n) w przestrzeni metrycznej (X, ρ) spełnia, dla prawie wszystkich n , warunek $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$ i $\sum_n a_n < \infty$, to ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego.
2. Oddzielić ziarno od plew i ustalić, czy dla każdej metrycznej przestrzeni (X, ρ) prawdziwe są stwierdzenia
 - (i) jeżeli X jest zwarta to jest zupełna;
 - (ii) jeżeli X jest zwarta to każda metryka równoważna ρ' jest zupełna
 - (iii) jeżeli X jest zupełna to jest zwarta;
 - (iv) jeżeli X jest zupełna to jest ośrodkowa;
 - (v) jeżeli X jest ośrodkowa to jest zupełna;
 - (vi) jeżeli X jest zupełna to każda podprzestrzeń $A \subseteq X$ jest zupełna (w tej samej metryce);
 - (vii) jeżeli X jest zupełna to każda podprzestrzeń domknięta $A \subseteq X$ jest zupełna (w tej samej metryce).
 - (viii) jeżeli X jest zwarta to każda funkcja $X \rightarrow X$ jest ciągła.

TWIERDZENIA BANACHA I BAIRE'A

3. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych nie jest typu G_δ na prostej.
4. Jak wiadomo (!), funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 0$ dla $x \notin \mathbb{Q}$ i $f(x) = 1/q$ gdy $x = p/q$ jest nieskracalnym ułamkiem, jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i nieciągła w każdym $x \in \mathbb{Q}$.

Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla której zbiór punktów ciągłości jest równy $\mathbb{Q}$.

5. Udowodnić, że jeżeli $I : X \rightarrow X$ jest izometrią zwartej przestrzeni (X, ρ) to I jest surjekcją.

WSKAZÓWKA: Chwyć jak w dowodzie twierdzenia o odwzorowaniu zwężającym.

6. Skonstruować funkcję nigdzie nieróżniczkowalną $f \in C[0, 1]$, wykorzystując twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zwężającym w następujący sposób:

Rozważamy przestrzeń

$$X = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0, f(1) = 1, f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$$

z metryką zbieżności jednostajnej. Dla $f \in X$ definiujemy

$$Tf(x) = \begin{cases} 3/4 f(3x) & \text{dla } x \in [0, 1/3], \\ 1/4 + 1/2 f(2 - 3x) & \text{dla } x \in [1/3, 2/3], \\ 1/4 + 3/4 f(3x - 2) & \text{dla } x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Wtedy $T : X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem zwężającym. Udowodnić, że punkt stały odwzorowania T jest szukaną funkcją; patrz też

<http://www.apronus.com/math/nodiffable.htm>

7. Skonstruować funkcję nigdzie nieróżniczkowalną $f \in C[0, 1]$, wykorzystując twierdzenie Baire'a o kategorii.

WSKAZÓWKA: Rozważyć, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $A_n \subseteq C[0, 1]$ złożony z tych funkcji f , dla których istnieje $x \in [0, 1]$, taki że dla każdego $y \in [0, 1] \setminus \{x\}$ zachodzi

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq n.$$

8. Wykorzystać twierdzenie Baire'a do udowodnienia, że istnieje funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która jest ciągła, ale nie jest monotoniczna na żadnym przedziale właściwym $[a, b] \subseteq [0, 1]$
9. Załóżmy, że każda metryka ρ' , równoważna z metryką ρ na X , jest zupełna. Udowodnić, że wtedy X jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy gdy X jest przestrzenią ośrodkową.

WSKAZÓWKA: Przestrzeń metryczna ośrodkowa zanurza się w przestrzeń metryczną zwartą.

PROBLEMY

- A. Udowodnić, że jeżeli każda ciągła funkcja $X \rightarrow \mathbb{R}$ na przestrzeni metrycznej ośrodkowej X jest ograniczona to X jest przestrzenią zwartą.
- B. Udowodnić, że przestrzeń Hilberta ℓ_2 jest zupełna (patrz 4.A).
- C. Udowodnić, że odwzorowanie $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dane wzorem

$$f(x) = (x, \frac{1}{|x - q_1|}, \dots, \frac{1}{|x - q_n|}, \dots),$$

gdzie $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q}$, jest homeomorfizmem zbioru liczb niewymiernych i pewnej domkniętej podprzestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wynioskować stąd, że na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ istnieje równoważna metryka zupełna.

- D. Udowodnić, że jeżeli na podprzestrzeni $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje równoważna metryka zupełna to A jest zbiorem typu G_δ .

WSKAZÓWKA: Wystarczy pokazać, że jeżeli F jest domknięciem A na prostej, to $F \setminus A$ jest typu F_σ .

Niech ρ będzie równoważną metryką zupełną na A . Sprawdzić, że dla każdego $x \in F \setminus A$ istnieje $\varepsilon > 0$, taka że $\rho\text{-diam}((x - \delta, x + \delta) \cap A) \geq \varepsilon$ dla każdego $\delta > 0$ (z zupełności ρ). Z drugiej strony, dla $x \in A$, $\rho\text{-diam}((x - \delta, x + \delta) \cap A) \rightarrow 0$ przy $\delta \rightarrow 0$ (bo ρ jest równoważna metryce euklidesowej). Pozwala to zapisać $F \setminus A$ jako sumę ciągu zbiorów domkniętych.

- E. Mówimy, że funkcja $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *pierwszej klasy* (Baire'a) jeżeli istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taki że $f(x) = \lim_n f_n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zauważyć, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna to f' jest pierwszej klasy.

Udowodnić, że funkcja dana przez $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ dla $x \notin \mathbb{Q}$ nie jest pierwszej klasy.