

PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE

1. Sprawdzić, że operacja domknięcia w dowolnej przestrzeni X spełnia zależności $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subseteq \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ dla dowolnych $A, B \subseteq X$.

Wypisać i sprawdzić analogiczne własności operacji wnętrza.

2. Niech X będzie dowolnym zbiorem, w którym określona jest (abstrakcyjna) operacja domknięcia $\overline{A}$ dla $A \subseteq X$, spełniająca powyższe aksjomaty. Udowodnić (za Kuratowskim), że istnieje na X topologia, która wyznacza takie właśnie domknięcie topologiczne.
3. Wykazać, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy $f^{-1}[\text{Int } B] \subseteq \text{Int } f^{-1}[B]$ dla dowolnego $B \subseteq Y$.

4. Rodzina $\mathcal{B}$ jest **podbazą** przestrzeni X jeśli skończone przekroje zbiorów z $\mathcal{B}$ stanowią bazę. Jaki jest naturalny przykład podbazy na $\mathbb{R}$? Zauważyć, że dla ciągłości $f : X \rightarrow Y$ wystarcza aby zbiory $f^{-1}[B]$ były otwarte dla B z ustalonej podbazy Y .

5. Funkcję ciągłą $f : X \rightarrow Y$ nazywamy przekształceniem domkniętym jeżeli obraz $f[F]$ jest domknięty w Y dla każdego domkniętego $F \subseteq X$. Otwartość odwzorowania f definiujemy analogicznie, zastępując ‘domknięty’ przez ‘otwarty’.

Podać przykłady ciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które nie są otwarte (nie są domknięte).

6. Sprawdzić, że $f : X \rightarrow Y$ jest przekształceniem domkniętym wtedy i tylko wtedy gdy $f[\overline{A}] = \overline{f[A]}$ dla dowolnego $A \subseteq X$, a f jest przekształceniem otwartym wtedy i tylko wtedy gdy f jest ciągłe i $f[\text{Int } (A)] \subseteq \text{Int } f[A]$ dla dowolnego $A \subseteq X$.
7. Zauważyć, że jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest ciągłą surjekcją to obraz zbioru gęstego w X jest gęsty w Y ; w szczególności, ciągły obraz przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowy.
8. Dla dowolnego zbioru A w p. topologicznej X , $x \in X$ jest **punktem skupienia** A jeżeli $x \in \overline{A} \setminus \{x\}$. Oznaczmy przez A^d zbiór punktów skupienia zbioru A . Sprawdzić, że

$$(i) \quad \overline{A} = A \cup A^d;$$

$$(ii) \quad \text{jeśli } A \subseteq B \text{ to } A^d \subseteq B^d;$$

$$(iii) \quad (A \cup B)^d = A^d \cup B^d;$$

$$(iv) \quad \overline{A^d} = A^d = (\overline{A})^d.$$

9. Zauważyć, że aksjomat T_1 jest równoważny temu, że wszystkie podzbiory skończone są domknięte.
10. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną tych podzbiórów ustalonej nieskończonej przestrzeni X , które mają skończone dopełnienie. Sprawdzić, że $\mathcal{T}$ jest topologią na X i topologia ta spełnia aksjomat T_1 , ale nie spełnia T_2 .
11. Niech $X = \mathbb{R}$; wprowadzamy topologię w X przez bazy lokalne: dla $x \neq 0$ bazą w X są zbiory postaci $(x - \delta, x + \delta)$; bazą w $x = 0$ są zbiory postaci $(-\delta, \delta) \setminus Z$, gdzie $Z = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Sprawdzić, że taka przestrzeń jest Hausdorffa (czyli spełnia aksjomat T_2), ale nie jest regularna (czyli nie spełnia T_3).

WSKAZÓWKA: Z nie daje się oddzielić od 0.

12. Wykazać, że strzałka jest normalna.

WSKAZÓWKA: Dla rozłącznych i domkniętych podzbiorów F, H strzałki rozważyć $U(F) = \bigcup_{x \in F} [x, \delta(x))$, gdzie $\delta(x) > 0$ spełnia $[x, \delta(x)) \cap H = \emptyset$ etc.

13. Pokazać, że istnieje ciągła surjekcja ze strzałki na $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną, natomiast nie ma takiej surjekcji ze strzałki na $X = \mathbb{R}$ z topologią dyskretną.

14. Wykazać, że jeśli funkcje $f, g : X \rightarrow Y$ są ciągłe i $Y \in T_2$ to zbiór $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ jest domknięty.

15. Rozważmy przestrzeń $X = Y \cup \{\infty\}$ z jednym punktem skupienia: deklarujemy, że każdy zbiór $A \subseteq Y$ jest otwarty, natomiast zbiory otwarte zawierające ∞ są postaci $\{\infty\} \cup (Y \setminus I)$, gdzie $I \subseteq Y$ jest skończony.

(a) Sprawdzić, że faktycznie zdefiniowaliśmy topologię na X .

(b) Ustalić, kiedy ta topologia ma bazę przeliczalną i kiedy jest ośrodkowa.

(c) Podać wzory na domknięcie i wewnątrz dowolnego zbioru $A \subseteq X$.

(d) Wykazać, że X jest przestrzenią normalną.

16. Sprawdzić, że aksjomaty oddzielania T_i dla $i \leq 3\frac{1}{2}$ dziedziczą się na dowolne podprzestrzenie. Udowodnić, że normalność jest dziedziczna ze względu na podprzestrzenie domknięte (tzn. jeśli X jest normalna, $Y \subseteq X$ domknięta to Y jest przestrzenią normalną).

PROBLEMY

A. Zbiór U nazywamy *dziedziną otwartą* jeśli $U = \text{Int}(\overline{U})$. Wykazać, że jeśli F jest domknięty to $U = \text{Int} F$ jest dziedziną otwartą. Udowodnić, że dziedziny otwarte zamknięte są na skończone przekroje, ale niekoniecznie na skończone sumy.

B. Zadanie Kuratowskiego: Stosując operację domknięcia i dopełnienia do dowolnego zbioru A w przestrzeni topologicznej można otrzymać co najwyżej 14 zbiorów.

WSKAZÓWKA: Sprawdzić, że $A^{-c-c-c-} = A^{-c-}$ (c oznacza dopełnienie).

C. Udowodnić, że ciągły obraz przestrzeni normalnej przez przekształcenie domknięte jest normalny.

D. Jeśli $x \in A$ nie jest punktem skupienia A (patrz 8) to mówimy, że x jest punktem izolowanym w A . Zbiór $A \subseteq X$ jest doskonały jeśli A jest domknięty i nie ma punktów izolowanych.

Udowodnić **Twierdzenie Cantora–Bendixsona**: Każda przestrzeń X z bazą przeliczalną jest postaci $X = A \cup I$, gdzie A jest doskonały, a I przeliczalny.

WSKAZÓWKA: Rozważyć X^0 , gdzie $x \in X^0$ jeśli każde otoczenie x zawiera nieprzeliczalnie wiele elementów.

E. Ciąg (x_n) w dowolnej przestrzeni topologicznej X jest zbieżny do $x \in X$ jeżeli każde otoczenie x zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu. Następujące przykłady pokażą, że na ogół ciągi zbieżne nie wystarczają do opisu domknięcia zbioru (nawet przeliczalnego):

E.1. Niech $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ma topologię dyskretną, natomiast otoczenia ∞ są postaci $\{\infty\} \cup A_k(g)$, gdzie $A_k(g) = \{(n, m) : n \geq k, g(n) \geq m\}$ dla pewnej funkcji $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

E.2. Powiedzmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest mały jeżeli $\sum_{n \in A} 1/n < \infty$. Zauważmy, że każdy nieskończony zbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ zawiera nieskończony mały podzbiór.

Niech $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; otoczenia ∞ są postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{N} \setminus A)$, gdzie A jest mały.