

ZWARTOŚĆ

1. Wykazać, że w przestrzeni regularnej X można oddzielić dwa zbiory domknięte rozłączne, o ile jeden z nich jest zwarty.
2. Wykazać, że jeżeli $\{F_t : t \in T\}$ jest rodziną domkniętych podzbiorów zwartej przestrzeni X , $U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym i $\bigcap_{t \in T} F_t \subseteq U$ to $\bigcap_{i \leq n} F_{t_i} \subseteq U$ dla pewnego n i $t_1, \dots, t_n \in T$.
3. Jeśli przestrzenie X, Y są zwarte, $F \subseteq X$, $H \subseteq Y$ domknięte oraz $F \times H$ zawiera się w otwartym zbiorze $W \subseteq X \times Y$, to istnieją otwarte U, V , takie że $F \times H \subseteq U \times V \subseteq W$.
4. Zauważyć, że jeśli topologia $\mathcal{T}$ na X jest zwarta, to żadna topologia istotnie bogatsza niż $\mathcal{T}$ nie jest zwarta oraz że żadna topologia istotnie uboższa niż $\mathcal{T}$ nie jest T_2 .

WSKAZÓWKA: rozważyć identyczność $X \rightarrow X$.

5. Udowodnić, że jeśli przestrzeń K jest zwarta, to rzut $\pi_1 : X \times K \rightarrow X$ jest odwzorowaniem domkniętym dla dowolnej przestrzeni regularnej X .

WSKAZÓWKA: Rozważyć domknięty $F \subseteq X \times K$ i $x_0 \notin \pi_1[F]$. Wtedy zbiór $\{\langle x_0, y \rangle : y \in K\}$ jest zwarty i rozłączny z F .

6. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie taką funkcją, że jej wykres jest domkniętym podzbiorem $X \times Y$. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń Y jest zwarta to f jest funkcją ciągłą.

WSKAZÓWKA: Poprzednie zadanie.

7. Nieformalnie mówiąc, uzwarceniem przestrzeni X nazywamy zwartą przestrzeń $\widetilde{X}$, zawierającą X , lub homeomorficzną kopię X , jako podzbiór gęsty. Zbiór $\widetilde{X} \setminus X$ nazywamy narostem uzwarcenia.

Zauważyć, że $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest uzwarceniem prostej, jeśli przyjmiemy, że zbiory postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{R} \setminus (n, n))$ są bazą otoczeń ∞ . Podobnie, przestrzeń opisana w zadaniu 15 na liście 7 jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni dyskretnej.

8. Skonstruować uzwarcenie prostej o naroście dwupunktowym oraz uzwarcenia o narostach $[-1, 1]$, $[-1, 1] \times \{0, 1\}$, S^1 , odpowiednio.
9. Czym jest przestrzeń powstała po uzwarceniu płaszczyzny jednym punktem?

SPÓJNOŚĆ

10. Opisać wszystkie spójne podzbiory $\mathbb{R}$.
11. Zauważyć, że własność Darboux funkcji ciągłych na prostej wynika z faktu, że ciągły obraz przestrzeni spójnej jest spójny.
12. Wykazać, że $I = [0, 1]$ nie jest homeomorficzny z okręgiem S^1 rozważając przestrzenie postaci $I \setminus \{x\}$, $S^1 \setminus \{x\}$. W podobny sposób sprawdzić, że $\mathbb{R}$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.
13. Które spośród liter alfabetu $A, B, C, \dots$ są homeomorficzne? Rozważyć litery prostego kroju.
14. Udowodnić, że przestrzeń postaci $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest łukowo spójna dla przeliczalnego zbioru A .

15. Przestrzeń

$$X = \{ \langle x, y \rangle : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1/\pi \} \cup \{0\} \times [-1, 1],$$

jest zwartym podzbiorem płaszczyzny. Sprawdzić, że X jest spójna, ale nie jest łukowo spójna.

16. Niech $X = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ i niech $C = 2^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem Cantora. Czy istnieje odwzorowanie ciągłe

- (i) z $[0, 1]$ na C ;
- (ii) z $X \times [0, 1]$ na C ;
- (iii) z $\mathbb{Q} \times C$ na $X \times C$? Na odwrót?

17. Zbadać, czy poniższe pary przestrzeni X, Y są homeomorficzne

- (i) $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, $Y = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$;
- (ii) $X = \mathbb{Q} \times [0, 1]$, $Y = \mathbb{N} \times [0, 1]$,

18. Wśród podanych przestrzeni znaleźć pary przestrzeni homeomorficznych:

- (i) $X_1 = \{ \langle x, y \rangle : y = \sin(1/x), 0 < |x| \leq 2 \}$;
- (ii) $X_2 = X_1 \cup (\{0\} \times [-1, 1])$;
- (iii) $X_3 = \{ \langle x, y \rangle : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 2 \}$;
- (iv) $X_4 = X_3 \cup (\{0\} \times [-1, 1])$;
- (v) $X_5 = X_3 \cup \{ \langle 0, 0 \rangle \}$.

19. Zauważyć, że przekrój zstępującego ciągu zbiorów spójnych nie musi być spójny.

20. Udowodnić, że przekrój zstępującego ciągu zwartych i spójnych zbiorów (w pewnej przestrzeni metrycznej) jest zwarty i spójny.

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

21. Udowodnić, że przestrzeń zwarta X jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy gdy na X istnieje przeliczalna rodzina funkcji ciągłych $X \rightarrow [0, 1]$, która rozdziela punkty.

WSKAZÓWKA: Taka rodzina pozwala zanurzyć X w $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

22. Udowodnić, że jeśli K jest zwartym podzbiorem przestrzeni całkowicie regularnej X , to każda funkcja ciągłą $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ przedłuża się do funkcji ciągłej $X \rightarrow \mathbb{R}$.

WSKAZÓWKA: X zanurza się w $[0, 1]^T$ dla pewnego T .

23. **Przestrzenie ilorazowe.** Jeżeli na przestrzeni topologicznej X dana jest relacja równoważności $\sim$ to na zbiorze $X/\sim$ klas abstrakcji definiujemy topologię przestrzeni ilorazowej, jako najbogatszą topologię, dla której odwzorowanie ilorazowe $q : X \rightarrow X/\sim$ jest ciągłe.

Na przykład, możemy w ten sposób skleić zbiór $F \subseteq X$ w punkt, biorąc relację o klasach abstrakcji F i $\{x\}$ dla $x \in X \setminus F$.

Jaka przestrzeń powstaje z $X = [0, 1]$ po sklejeniu zbioru $\{0, 1\}$ w punkt?

24. Niech $X = [0, 1]^2$. Co otrzymamy jako $X/\sim$ gdy

- (i) $\langle x, 0 \rangle \sim \langle x, 1 \rangle$ dla każdego $x \in [0, 1]$ (inne klasy abstrakcji są jednopunktowe);
- (ii) dodatkowo $\langle 0, x \rangle \sim \langle 1, x \rangle$ dla każdego $x \in [0, 1]$.

PROBLEMY.

A. Udowodnić, że każdy zwarty podzbiór strzałki jest przeliczalny.

B. Dwie strzałki. Niech

$$X = (0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Zauważyć, że podzbiory X postaci $(a, b] \times \{0\} \cup [a, b) \times \{1\}$ generują topologię na X — taką przestrzeń nazywamy *dwie strzałki* (*split interval*), chyba widać dlaczego? Zauważyć, że zbiory otwarte z powyższej bazy to są odcinki porządkowe w porządku leksykograficznym na zbiorze X . Udowodnić, że przestrzeń X jest zwarta.

C. Przestrzeń $[0, 1]^T$ jest zawsze zwarta, ale dla $|T| \geq \mathfrak{c}$ nie jest **ciągowo zwarta**, czyli zawiera ciągi bez podciągów zbieżnych.

WSKAZÓWKA: Przyjąć, że $T = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Niech $x_n \in [0, 1]^{\{0, 1\}^{\mathbb{N}}}$ będzie zdefiniowany przez warunek $x_n(\alpha) = \alpha(n)$ dla $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

D. Niech X będzie podprzestrzenią $[0, 1]^{\mathbb{R}}$, złożoną z tych elementów, które mają tylko przeliczalnie wiele niezerowych współrzędnych. Udowodnić, że X jest ciągowo zwarta, ale nie jest zwarta.

E. Udowodnić, że nie istnieje uzwarcenie X prostej, takie że narost $X \setminus \mathbb{R}$ składa się z trzech punktów.

F. Niech X będzie zwartym i spójnym podzbiorem płaszczyzny. Twierdzenie Sierpińskiego: *X nie da się przedstawić w postaci ciągu parami rozłącznych zbiorów niepustych i domkniętych.* Dowód można znaleźć w książce Engelkinga (6.1.27).

G. Niech X będzie przestrzenią powstałą z $\mathbb{R}$ po zlepieniu zbioru $\mathbb{N}$ w punkt. Udowodnić, że X nie jest metryzowalna, ponieważ nie ma bazy przeliczalnej w punkcie powstałym ze zlepiania $\mathbb{N}$.

KONIEC (BYĆ MOŻE)