0.4 Zadania

0.4.1 Obliczyć

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1/n)$; $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n,1/n)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n,n)$;

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,n+3)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n,n+3)$;

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,2n)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-n^2,1/n)$.

0.4.2 Dla ciągów zbiorów A_n z poprzedniego zadania obliczyć $\limsup_n A_n$ i $\liminf_n A_n$.

0.4.3 Zapisać przedział domknięty postaci $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ jako przekrój ciągu przedziałów otwartych. Podobnie zapisać przedział otwarty (a,b) jako sumę przedziałów domkniętych.

0.4.4 Wykazać, że w powyższym zadaniu nie można zamienić miejscami określeń 'otwarty' i 'domknięty'.

0.4.5 Zapisać trójkąt $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1, 0<y<x\}$ jako sumę prostokątów. Zauważyć, że wystarczy wysumować przeliczalnie wiele prostokątów, aby taki trójkąt uzyskać.

0.4.6 Zauważyć, że $x\in\limsup_n A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy $x\in A_n$ dla nieskończenie wielu n; podobnie $x\in\liminf_n A_n \iff x\in A_n$ dla prawie wszystkich n.

0.4.7 Uzasadnić następujące zależności

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\liminf_n A_n\subseteq\limsup_n A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$;

(ii) $(\liminf_n A_n)^c=\limsup_n A_n^c$, $(\limsup_n A_n)^c=\liminf_n A_n^c$;

(iii) $\liminf_n(A_n\cap B_n)=\liminf_n A_n\cap\liminf_n B_n$;

(iv) $\liminf_n(A_n\cup B_n)\supseteq\liminf_n A_n\cup\liminf_n B_n$ i równość na ogół nie zachodzi.

Zapisać zależności dla granicy górnej lim sup, analogiczne do (iii)–(iv).

0.4.8 Sprawdzić, że dla danego ciągu zbiorów A_n, przyjmując $B_1=A_1$, $B_n=A_n\setminus\bigcup_{j<n}A_j$ dla $n>1$, otrzymujemy $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, przy czym zbiory B_n są parami rozłączne.

0.4.9 Udowodnić, że $\lim_n A_n=A \iff \lim_n(A_n\triangle A)=\emptyset$.

0.4.10 Wykazać, że każda rodzina parami rozłącznych przedziałów na prostej jest przeliczalna.

0.4.11 Niech $U\subseteq\mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Dla $x,y\in U$ definiujemy $x\sim y$ jeśli istnieje przedział (a,b), taki że $x,y\in(a,b)\subseteq U$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji są przedziałami otwartymi. Wywnioskować stąd i z zadania poprzedniego, że każdy otwarty podzbiór prostej jest sumą ciągu parami rozłącznych przedziałów.

0.4.12 Sprawdzić, że przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest otwarty.

0.5 Problemy

0.5.A Udowodnić następujący "warunek Cauchy'ego": ciąg zbiorów A_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych ciągów liczb naturalnych $(n_i)_i$, $(k_i)_i$ rozbieżnych do nieskończoności mamy $\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_{n_i} \triangle A_{k_i}) = \emptyset$.

0.5.B Udowodnić, że dowolny ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma podciąg zbieżny.

0.5.C Podać przykład ciągu $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, który nie ma podciągu zbieżnego. Uwaga: może być trudne; lepiej zastąpić $\mathbb{R}$ innym zbiorem tej samej mocy.

0.5.D Udowodnić, że jeśli F jest domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$ to dla każdego ciągu $x_n \in F$ istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do pewnego $x \in F$.

Wskazówka: Aby $x \in F$ był granicą pewnego podciągu x_n potrzeba i wystarcza by dla każdego $\delta > 0$ w $(x - \delta, x + \delta)$ znajdowało się nieskończenie wiele wyrazów ciągu x_n. Przyjąć, że żaden $x \in F$ nie ma tej własności i zastosować Twierdzenie 0.3.5.