1.10 Zadania

Rodziny zbiorów

1.10.1 Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem zbiorów. Zauważyć, że jeśli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \triangle B \in \mathcal{R}$ i $A \cap B \in \mathcal{R}$. Sprawdzić, że $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ jest także pierścieniem w sensie algebraicznym, w szczególności, że działanie $\triangle$ jest łączne i $\bigcap$ jest rozdzielne względem $\triangle$.

1.10.2 Niech $\mathcal{F}$ będzie taką rodziną podzbiorów X, że $X \in \mathcal{F}$ oraz $A \setminus B \in \mathcal{F}$ dla $A, B \in \mathcal{F}$. Sprawdzić, że $\mathcal{F}$ jest ciałem.

1.10.3 Zauważyć, że przekrój dowolnej ilości pierścieni, ciał... jest pierścieniem, ciałem itp.

1.10.4 Zauważyć, że jeśli $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ to $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \alpha(\mathcal{G})$, gdzie α oznacza jeden z symboli generowania r, s, a, σ.

1.10.5 Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną wszystkich skończonych podzbiorów X. Opisać $r(\mathcal{G})$, $s(\mathcal{G})$, $a(\mathcal{G})$ i $\sigma(\mathcal{G})$.

1.10.6 Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie ciałem zbiorów i niech $Z \subseteq X$. Wykazać, że

$$a(\mathcal{A} \cup \{Z\}) = \{(A \cap Z) \cup (B \cap Z^c) : \ A, B \in \mathcal{A}\}.$$

1.10.7 Zauważyć, że jeżeli $\mathcal{C}$ jest taką rodziną podzbiorów X że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ dla pewnych $C_n \in \mathcal{C}$ to $s(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

1.10.8 Zauważyć, że rodzina, która jest jednocześnie pierścieniem i klasą monotoniczną jest σ-pierścieniem.

1.10.9 Sprawdzić, że jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów i rodzina $\mathcal{A}$ jest zamknięta na **rozłączne** przeliczalne sumy to $\mathcal{A}$ jest σ–ciałem.

1.10.10 Niech $\mathcal{A}$ bedzie skończonym ciałem zbiorów. Udowodnić, że $|\mathcal{A}| = 2^n$ dla pewnej liczby naturalnej n. WSKAZÓWKA: wymyśleć, co to jest n,

1.10.11 Niech $\mathcal{F}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów. Udowodnić, że ciało $a(\mathcal{F})$ jest przeliczalne.

1.10.12 Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}$ jest nieskończonym σ–ciałem to $\mathcal{A}$ ma przynajmniej $\mathfrak{c}$ elementów. WSKAZÓWKA: Wykazać, że w każdym nieskończonym σ-ciele istnieje ciąg niepustych parami rozłącznych zbiorów; skorzystać z tego, że $\mathfrak{c}$ jest mocą $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Funkcje zbioru

1.10.13 Niech μ będzie skończoną addytywną funkcją zbioru, określoną na pierścieniu $\mathcal{R}$. Sprawdzić, że (dla dowolnych $A, B, C \in \mathcal{R}$)

(i) $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \triangle B)$;

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

(iii) $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Jak będzie wyglądał analogiczny wzór dla 4, 5... zbiorów?

1.10.14 Sprawdzić, że dla funkcji μ z poprzedniego zadania, warunek $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ określa relację równoważności na $\mathcal{R}$.

1.10.15 Niech X będzie zbiorem skończonym. Sprawdzić, że wzór $\mu(A) = \frac{|A|}{|X|}$ określa miarę probabilistyczną na $\mathcal{P}(X)$.

1.10.16 Niech $(x_n) \subseteq X$ będzie ustalonym ciągiem i niech (c_n) będzie ciągiem liczb nieujemnych. Wykazać, że wzór

$$\mu(A) = \sum_{n:x_n \in A} c_n$$

określa miarę na $\mathcal{P}(X)$ (w razie trudności rozważyć ciąg skończony $x_1, \ldots, x_n$). Kiedy taka miara jest skończona?

1.10.17 Zauważyć, że $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest σ–ciałem generowanym przez singletony. Wykazać, że każda miara na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest postaci opisanej w poprzednim zadaniu.

1.10.18 Niech μ będzie miarą na σ–ciele $\mathcal{A}$ i niech $A_n \in \mathcal{A}$. Zakładając, że $\mu(A_n \cap A_k) = 0$ dla $n \neq k$, wykazać że

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

1.10.19 Uzupełnić szczegóły dowodu Twierdzenia 1.5.5 w następujący sposób: Dla przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) zdefiniujmy $\widehat{\Sigma}$ jako rodzinę zbiorów postaci $A \triangle N$, gdzie $A \in \Sigma$, $N \subseteq B$ dla pewnego $B \in \Sigma$ miary zero. Wtedy $\widehat{\Sigma}$ jest σ-ciałem, a wzór $\widehat{\mu}(A \triangle N) = \mu(A)$ definiuje poprawnie przedłużenie miary μ z Σ na $\widehat{\Sigma}$.

Na prostej; miara Lebesgue'a

1.10.20 Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem na prostej rzeczywistej, generowanym przez przedziały postaci $[a, b)$. Sprawdzić, że $A \in \mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy A jest rozłączną skończoną sumą takich przedziałów.

1.10.21 Wykazać, że rodzina podzbiorów $\mathbb{R}$ postaci

$$(F_1 \cap V_1) \cup \ldots \cup (F_k \cap V_k),$$

gdzie F_i są domknięte, V_i są otwarte, $k \in \mathbb{N}$, jest ciałem.

1.10.22 Sprawdzić, że σ–ciało $Bor(\mathbb{R})$ jest generowane przez każdą z rodzin

(i) odcinki otwarte o końcach wymiernych;

(ii) odcinki domknięte;

(iii) półproste postaci $(-\infty, a]$;

(iv) półproste postaci (a, ∞);

(v) odcinki domknięte o końcach wymiernych.

1.10.23 Sprawdzić, że

(i) $\lambda(A) = 0$ dla każdego zbioru skończonego A;
(ii) $\lambda[a, b] = \lambda(a, b) = b - a$ dla $a < b$;
(iii) $\lambda(U) > 0$ dla każdego zbioru otwartego $U \neq \emptyset$;
(iv) $\lambda(A) = 0$ dla każdego zbioru przeliczalnego A.

1.10.24 Podać przykład zbioru mierzalnego A, takiego że

(i) $\lambda(A) = 1$ i A jest nieograniczonym zbiorem otwartym;
(ii) $\lambda(\mathrm{int}(A)) = 1$, $\lambda(A) = 2$, $\lambda(\overline{A}) = 3$;
(iii) $\lambda(A) = 0$ i $A \subseteq [0, 1]$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

UWAGA: $\mathrm{int}(A)$ oznacza wnętrze zbioru, czyli największy zbiór otwarty zawarty w A.

1.10.25 Skonstruować, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, zbiór domknięty $F \subseteq [0, 1]$ o wnętrzu pustym, dla którego $\lambda(F) > 1 - \varepsilon$.

I SPOSÓB: Zmodyfikować konstrukcję zbioru Cantora.

II SPOSÓB: Niech $(q_n)_n$ będzie ciągiem liczb wymiernych z $[0, 1]$. Rozważyć zbiór otwarty $V = \bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n})$ przy odpowiednim doborze $\varepsilon > 0$.

1.10.26 Zauważyć, że dla każdego zbioru $M \in \mathfrak{L}$, jeśli $\lambda(M) < \infty$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony zbiór mierzalny $M_0 \subseteq M$, taki że $\lambda(M \setminus M_0) < \varepsilon$.

1.10.27 Wykazać, że istnieje zbiór domknięty $F \subseteq [0, 1]$ miary dodatniej złożony z liczb niewymiernych.

1.10.28 Dla $B \subseteq \mathbb{R}$ i $x \neq 0$, niech xB oznacza zbiór $\{xb : b \in B\}$ (czyli jednokładność zbioru B).

Sprawdzić, że takie przeskalowanie zbioru otwartego jest otwarte i że rodzina tych $B \in Bor(\mathbb{R})$ dla których $xB \in Bor(\mathbb{R})$ dla każdego $x \neq 0$ jest σ-ciałem. Wyciągnąć stąd wniosek, że dla każdego $B \in Bor(\mathbb{R})$ i x mamy $xB \in Bor(\mathbb{R})$ (tzn. że σ–ciało $Bor(\mathbb{R})$ jest niezmiennicze na jednokładność).

1.10.29 Wykazać, że $\lambda(xB) = x\lambda(B)$ dla każdego zbioru borelowskiego B i $x > 0$. Rozszerzyć ten rezultat na zbiory mierzalne.

1.10.30 Udowodnić, że dla dowolnego zbioru mierzalnego M miary skończonej i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór postaci $I = \bigcup_{i \leqslant n}(a_i, b_i)$, taki że $\lambda(M \triangle I) < \varepsilon$, przy czym $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Własności miar

1.10.31 Niech (X, Σ, μ) będzie skończoną przestrzenią miarową. Wykazać, że jeżeli $A_n \in \Sigma$ i dla każdego n zachodzi nierówność $\mu(A_n) \geqslant \delta > 0$, to istnieje $x \in X$, taki że $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu n.

1.10.32 Udowodnić, że jeśli (A_n) jest ciągiem zbiorów z σ–ciała, na którym określona jest skończona miara μ, to jeśli (A_n) jest zbieżny do A to $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$. Czy skończoność miary jest istotna?

1.10.33 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Zbiór $T \in \Sigma$ jest atomem miary μ jeśli $\mu(T) > 0$ i dla każdego $A \in \Sigma$ jeśli $A \subseteq T$ to $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = \mu(T)$. Mówimy, że miara μ jest **bezatomowa** jeśli nie ma atomów.

Sprawdzić, że miara Lebesgue'a jest bezatomowa. Zauważyć, że inne miary rozważane do tej pory miały atomy.

1.10.34 Udowodnić, że skończona miara bezatomowa μ na Σ ma następującą własność Darboux: dla każdego $A \in \Sigma$ i $0 \leqslant r \leqslant \mu(A)$ istnieje $B \in \Sigma$, taki że $B \subseteq A$ i $\mu(B) = r$.

Wskazówka: Niech $\mu(X) = 1$; sprawdzić, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i $A \in \Sigma$ jeśli $\mu(A) > 0$ to istnieje $B \in \Sigma$, że $B \subseteq A$ i $0 < \mu(B) < \varepsilon$. Następnie sprawdzić, że X jest rozłączną sumą zbiorów A_n o własności $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$. To rozumowanie pokaże, że zbiór wartości μ jest gęsty w $[0, 1]$; potem już blisko do celu.

Ideały i miary zewnętrzne

1.10.35 Niepustą rodzinę $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy σ–ideałem jeśli $A \subseteq B$ i $B \in \mathcal{J}$ implikuje $A \in \mathcal{J}$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$ jeśli $A_n \in \mathcal{J}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Podaj znane Ci przykłady σ–ideałów na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$.

1.10.36 Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem na X. Opisać $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{J})$ (rozważyć przypadki $X \in \mathcal{J}, X \notin \mathcal{J}$). Zdefiniować na $\mathcal{A}$ zerojedynkową miarę μ, analogicznie jak w przykładzie z rozdziału 1.2.

1.10.37 Niech $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie σ–ideałem nie zawierającym X. Na $a(\mathcal{J})$ definiujemy addytywną, zerojedynkową funkcję zbioru μ (por. zadanie poprzednie). Określić miarę zewnętrzną za pomocą μ i scharakteryzować rodzinę zbiorów mierzalnych.

1.10.38 Niech $\{A_1, A_2, \ldots\}$ będzie partycją przestrzeni X na zbiory niepuste.

(i) Opisać ciało $\mathcal{A}$ generowane przez zbiory A_n, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Na $\mathcal{A}$ określamy addytywną funkcję μ, tak aby $\mu(A_n) = 2^{-n}$ i $\mu(X) = 1$. Jak można opisać σ–ciało zbiorów mierzalnych względem miary zewnętrznej pochodzącej od μ? (patrz Definicja 1.9.1)

1.10.39 Niech $X = [0, 1) \times [0, 1]$ i niech $\mathcal{R}$ będzie ciałem w X generowanym przez cylindry postaci $[a, b) \times [0, 1]$. Na $\mathcal{R}$ rozważamy funkcję zbioru, taką że $\mu([a, b) \times [0, 1]) = b - a$ dla $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Jak wyglądają (z grubsza...) zbiory μ^*–mierzalne? (patrz Definicja 1.9.1). Zauważyć, że w X można wskazać **wiele** parami rozłącznych zbiorów E niemierzanych, takich że $\mu^*(E) = 1$.

1.10.40 Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem podzbiorów $\mathbb{Q}$ generowanym przez zbiory postaci $\mathbb{Q} \cap [a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Sprawdzić, że na $\mathcal{R}$ można określić addytywną funkcję ν, tak że $\nu(\mathbb{Q} \cap [a, b)) = b - a$ dla $a < b$. Udowodnić, że ν nie jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{R}$ i obliczyć $\nu^*(\mathbb{Q})$.

1.10.41 Zauważyć, że we wzorze na λ^* można zastąpić odcinki postaci $[a, b)$ przez odcinki postaci (a, b) (lub $[a, b]$). Stąd bezpośrednio wynika możliwość przybliżania od góry zbiorami otwartymi.

1.11 Problemy

1.11.A Udowodnić, że suma dowolnej (nawet nieprzeliczalnej) rodziny przedziałów na prostej, postaci $[a, b]$, $a < b$, jest zbiorem borelowskim.

1.11.B Udowodnić, że dla dowolnego zbioru X, $|X| \leqslant \mathfrak{c}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje w $\mathcal{P}(X)$ przeliczalna rodzina zbiorów $\mathcal{F}$, taka że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty.

1.11.C Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie rodziną mocy $\leqslant \mathfrak{c}$. Udowodnić, że $|\sigma(\mathcal{F})| \leqslant \mathfrak{c}$. Wywnioskować stąd, że $|Bor(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ i że istnieją nieborelowskie zbiory na prostej.

Uwaga: tutaj potrzebna jest indukcja pozaskończona.

1.11.D Udowodnić, że funkcja zbioru λ zdefiniowana na pierścieniu generowanym przez odcinki postaci $[a, b)$ (przez warunek $\lambda([a, b)) = b - a$ dla $a < b$) jest ciągła z góry na zbiorze $\emptyset$ (a więc jest przeliczalnie addytywna). Wskazówka: Zbiory postaci $\bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$ są zwarte i (w pewnym sensie) przybliżają zbiory z $\mathcal{R}$ od środka.

1.11.E Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $A_1, \ldots, A_{2009} \in \Sigma$ będą zbiorami o własności $\mu(A_i) \geqslant 1/2$. Wykazać, że istnieje $x \in X$, taki że $x \in A_i$ dla przynajmniej 1005 wartości i.

1.11.F Przeprowadzić następującą konstrukcję zbioru Vitali'ego: Dla $x, y \in [0, 1)$, niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech Z będzie zbiorem, który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wybiera dokładnie jeden element. Sprawdzić, że $\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} (Z \oplus q) = [0, 1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1.

Zauważyć, że λ jest neizmienniczna na $[0, 1)$ względem działania $\oplus$; wywnioskować stąd, że powyższy zbiór Z nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

1.11.G Skonstruować zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\lambda(B \cap I) > 0$ i $\lambda(B^c \cap I) > 0$ dla każdego niepustego odcinka otwartego I.

1.11.H Udowodnić twierdzenie Steinhausa: Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A) > 0$ to zbiór $A - A$ (różnica kompleksowa) zawiera odcinek postaci $(-\delta, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$.

Wskazówka: Można założyć, że $\lambda(A) < \infty$; pokazać najpierw że istnieje taki niepusty odcinek I, że $\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I)$.

1.11.I Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie takim zbiorem mierzalnym, że $\lambda(A \triangle (x + A)) = 0$ dla każdej liczby wymiernej x. Udowodnić, że $\lambda(A) = 0$ lub $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

Wskazówka: Twierdzenie Steinhausa.

1.11.J (Wymaga indukcji pozaskończonej.) Skonstruować zbiór Bernsteina $Z \subseteq [0, 1]$, czyli taki zbiór, że

$$Z \cap P \neq \emptyset, \quad P \setminus Z \neq \emptyset,$$

dla dowolnego zbioru domkniętego nieprzeliczalnego $P \subseteq [0, 1]$. Zauważyć, że Z nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, a nawet $\lambda^*(Z) = \lambda^*([0, 1] \setminus Z) = 1$.

WSKAZÓWKA: Wszystkie zbiory P domknięte nieprzeliczalne można ustawić w ciąg P_α, $\alpha < \mathfrak{c}$. Zdefiniować Z jako $\{z_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, gdzie ciąg z_α i pomocniczy ciąg y_α sa takie, że

$$z_\alpha, y_\alpha \in P_\alpha \setminus \{z_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Aby przeprowadzić konstrukcję trzeba wiedzieć lub sprawdzić, że każdy zbiór P_α ma moc $\mathfrak{c}$.