2.5 Zadania

2.5.1 Sprawdzić, że operacja przeciwobrazu zbioru przez funkcję zachowuje podstawowe operacje mnogościowe. Zauważyć, że

$$f\left[\bigcup_n A_n\right] = \bigcup_n f[A_n],$$

dla dowolnych zbiorów A_n z dziedziny funkcji f. Sprawdzić, że inkluzja

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

może być właściwa.

2.5.2 Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych względem σ–ciała Σ. Sprawdzić, że następujące zbiory należą do Σ:

(i) zbiór x, dla których ciąg $f_n(x)$ jest rosnący;

(ii) zbiór x, dla których $f_n(x) < 2$ dla wszystkich n;

(iii) zbiór x, dla których $f_n(x) < 2$ dla prawie wszystkich n;

(iv) zbiór x, dla których $f_n(x) < 2$ dla nieskończenie wielu n;

(v) zbiór x, dla których $\sup_n f_n(x) < 2$;

(vi) zbiór x, dla których $\sup_n f_n(x) \leqslant 2$;

(vii) zbiór x, dla których $f_n(x)$ jest zbieżny;

(viii) zbiór x, dla których $\limsup f_n(x) > \liminf f_n(x)$.

2.5.3 Wykazać, że suma zbieżnego szeregu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

2.5.4 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją. Niech $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : osc_x(f) \geqslant \varepsilon\}$, gdzie $osc_x(f) \geqslant \varepsilon$ oznacza, że dla każdego $\delta > 0$ istnieją $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$ takie że $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$.

Sprawdzić, że zbiór F_ε jest domknięty. Wywnioskować stąd, że zbiór punktów ciągłości funkcji jest borelowski.

2.5.5 Niech dla każdego t z pewnego zbioru T dana będzie funkcja ciągła $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $h = \sup_{t\in T} f_t$. Wykazać, że h jest funkcją borelowską (nawet jeśli T jest nieprzeliczalny). W tym celu rozważyć zbiór postaci $\{x : h(x) > a\}$.

2.5.6 Sprawdzić, że każdą funkcję prostą, mierzalną względem σ–ciała $\Sigma \subseteq P(X)$ można zapisać w postaci

(i) $\sum_{i\leqslant n} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $A_i \in \Sigma$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$, oraz

(ii) $\sum_{i\leqslant n} b_i \chi_{B_i}$, gdzie $B_i \in \Sigma$, a $B_1, \ldots, B_n$ są parami rozłączne.

Jakie warunki trzeba dopisać, aby takie przedstawienia były jednoznaczne?

2.5.7 Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe, branie modułu i mnożenie.

2.5.8 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, tzn. $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ dla pewnej stałej L. Pokazać, że $f[A]$ jest miary Lebesgue'a zero dla każdego A miary zero.

2.5.9 Wywnioskować z poprzedniego zadania, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję spełniającą warunek Lipschitza jest mierzalny.

WSKAZÓWKA: $f[F]$ jest zwarty gdy f jest ciągła i $F \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty; zastosować Wniosek 1.6.3.

2.5.10 Wykazać, że w zadaniach 8 i 9 wystarczy zakładać, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza lokalnie, na każdym odcinku postaci $[-n, n]$, a więc w szczególności gdy f ma ciągłą pochodną.

2.5.11 Zauważyć, że dowolna funkcja niemalejąca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska.

2.5.12 Skonstruować niemalejącą funkcję ciągłą $g : [0, 1] \to [0, 1]$, taką że $g[C] = [0, 1]$, gdzie $C \subseteq [0, 1]$ jest zbiorem Cantora.

WKAZÓWKA: niech $g(x) = 1/2$ dla $x \in (1/3, 2/3)$; $g(x) = 1/4$ dla $x \in (1/9, 2/9)$ itd.

2.5.13 Stosując funkcję g z poprzedniego zadania zauważyć, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny oraz że przeciwobraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny.

2.5.14 Zauważyć, że jeśli $\mu(X) < \infty$, a $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór A, taki że $\mu(A) < \varepsilon$ i f jest ograniczona na $X \setminus A$.

2.5.15 Niech $|f_n| \leqslant M$, gdzie $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Sprawdzić, że $|f| \leqslant M$ prawie wszędzie.

2.5.16 Niech f_n będzie niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnych do f według miary. Udowodnić, że wtedy $f_n \to f$ prawie wszędzie.

2.5.17 Sprawdzić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$. Pokazać, że $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ przy dodatkowym założeniu, że f_n i g_n są wspólnie ograniczone przez stałą.

2.5.18 Niech μ będzie miarą skończoną. Wykazać, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz $f(x) \neq 0$ dla każdego x, to $1/f_n \xrightarrow{\mu} 1/f$.

2.5.19 Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ (por. Zadanie 15). Pokazać, że założenie skończoności miary jest istotne.

2.6 Problemy

2.6.A Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym miary Lebesgue'a skończonej. Zbadać, czy funkcja

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda(A \cap (x + A)),$$

jest ciągła (tutaj λ oznacza miarę Lebesgue'a, $x + A$ oznacza przesunięcie zbioru).

2.6.B Wykazać, że każda mierzalna w sensie Lebesgue'a funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą prawie wszędzie ciągu funkcji ciągłych (f_n). W istocie można takie f_n wybrać klasy C^∞.

WSKAZÓWKA: Zacząć od przypadku $f = \chi_A$, gdzie A jest skończoną sumą przedziałów.

2.6.C Wykazać, że nie istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zbieżny punktowo do funkcji $\chi_{\mathbb{Q}}$ (czyli funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{Q}$).

WSKAZÓWKA: I sposób: można przeprowadzić dowód nie wprost, wykorzystując jedynie własność Darboux. II sposób: udowodnić, że granica ciągu funkcji ciągłych musi mieć punkt ciągłości.

2.6.D Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją, spełniającą warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Sprawdzić, że wtedy $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ $(a = f(1))$.

Udowodnić, że jeśli funkcja f jest mierzalna to $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2.7 DODATEK: Granice dolne i górne ciągów liczbowych

Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Liczbę a nazywamy punktem skupienia ciągu jeśli istnieje podciąg ciągu (a_n) zbieżny do a. Podobnie definiujemy fakt, że ∞ lub $-\infty$ jest punktem skupienia ciągu.

2.7.1 Pokazać, że zawsze istnieje najmniejszy punkt skupienia danego ciągu (będący liczbą bądź $-\infty, \infty$). Tę wielkość oznaczamy $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

2.7.2 Zauważyć, że $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg (a_n) jest nieograniczony z dołu.

2.7.3 Udowodnić, że $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ (gdzie a jest liczbą) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $a_n > a - \varepsilon$ dla prawie wszystkich n i $a_n < a + \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n.

2.7.4 Udowodnić, że $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k$.

2.7.5 Sprawdzić, że $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

2.7.6 Zdefiniować analogiczne pojęcie $\limsup$ i zapisać jego podstawowe własności.

2.7.7 Zauważyć, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego granica górna jest równa dolnej i jest liczbą rzeczywistą.

2.7.8 $\liminf_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - \limsup_{n\to\infty} b_n$ gdy $\lim a_n = a$.