5.5 Zadania

5.5.1 Zauważyć, że rozkład Hahna $X = X^+ \cup X^-$ dla miary znakowanej κ jest "jednoznaczny z dokładnością do zbiorów miary zero" (co to znaczy?). Czy rozkład α na różnicę dwóch miar jest jedyny?

5.5.2 Zauważyć, że jeśli miara znakowana ν przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest ograniczona.

5.5.3 Niech f będzie taką funkcją mierzalną, że przynajmniej jedna z funkcji f^+, f^- jest μ–całkowalna i niech $\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ dla zbiorów $A \in \Sigma$ (tutaj μ jest miarą na Σ). Zapisać ν^+, ν^- oraz $|\nu|$ za pomocą całek.

5.5.4 Zauważyć, że dla miary znakowanej ν, $|\nu|(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu(B) = 0$ dla każdego $B \subseteq A$ $(A, B \in \Sigma)$.

5.5.5 Zauważyć, że jeżeli $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$ to $\nu = 0$.

5.5.6 Zauważyć, że $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu^+, \nu^- \ll \mu$ i że podobną własność ma relacja singularności miar.

5.5.7 Twierdzenie RN nie musi zachodzić dla μ, które nie są σ–skończone. Niech Σ będzie σ–ciałem generowanym przez przeliczalne podzbiory $[0, 1]$; rozważyć miarę liczącą μ na Σ oraz zerojedynkową miarę ν na Σ.

5.5.8 Uzupełnić szczegóły dowodu Wniosku 5.3.2 według podanego szkicu.

5.5.9 Niech μ, ν będą σ–skończonymi miarami na Σ, takimi że $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$. Wykazać, że prawie wszędzie zachodzi zależność

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = 1 / \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

5.5.10 Niech μ, ν będą miarami σ–skończonymi, $\nu \ll \mu$ i niech funkcja $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ będzie wszędzie dodatnia. Sprawdzić, że $\mu \ll \nu$.

5.5.11 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $\mathcal{A}$ będzie σ–ciałem zawartym w Σ. Wykazać, że dla każdej Σ–mierzalnej funkcji całkowalnej $f : X \to \mathbb{R}$ istnieje $\mathcal{A}$–mierzalna funkcja g, taka że dla każdego $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(Taka $g = E(f|\mathcal{A})$ nazywa się w probabilistyce warunkową wartością oczekiwaną.)

5.5.12 Dystrybuantą miary probabilistycznej μ na $Bor(\mathbb{R})$ nazywamy funkcję $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, daną wzorem $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że F_μ jest niemalejącą funkcją lewostronnie ciągłą, przy czym $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$.

UWAGA: Czasami przyjmuje się definicję $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$; jak wpływa to na własności F_μ?

5.5.13 Wykazać, że dystrybuanta F_μ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy μ znika na punktach.

5.5.14 Miara znikająca na punktach bywa nazywana miarą ciągłą. Wykazać, że probabilistyczna miara μ na $Bor(\mathbb{R})$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezatomowa.

5.5.15 Jak juz wiemy (!) na zbiorze trójkowym Cantora C istnieje miara probabilistyczna μ, która znika na punktach. Niech $F(x) = \mu((-\infty, x))$ będzie dystrybuantą tej miary. Zauważyć, że F jest funkcją ciągłą, oraz $F[C] = [0, 1]$. Wywnioskować stąd, że obraz zbioru miary zero przez funkcję ciągłą nie musi być miary zero, a nawet nie musi być mierzalny.

5.5.16 Obliczyć (albo sprowadzić do znanej całki); podać uzasadnienia rachunków:

(i) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}\mu$ gdzie $\mu = \delta_0$, $\mu = \delta_0 + \delta_1$, $\mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_n$ (tutaj δ_x oznacza miarę probabilistyczną skupioną w punkcie x).

(ii) $\int_{[0,1]} x^2\ \mathrm{d}\lambda$;

(iii) $\int_{[0,1]} f\ \mathrm{d}\lambda$; gdzie $f(x) = x$ dla $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Q}$;

(iv) $\int_{[0,2\pi]} \sin x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A x^2\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

(v) $\int_{\mathbb{R}} f\ \mathrm{d}\lambda$; gdzie $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \notin \mathbb{Q}$;

(vi) $\int_{\mathbb{R}} 1/(x^2 + 1)\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

(vii) $\int_{\mathbb{R}} \cos x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A 1/(x^2 + 1)\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

(viii) $\int_{\mathbb{R}} \cos x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie μ jest taka że $\mu(-\infty, x) = \arctan x + \pi/2$;

(ix) $\int_{[0,\infty)} [x]\ \mathrm{d}\mu$, gdzie μ jest taka że $\mu[n, n + 1) = n^{-3}$;

(x) $\int_{\mathbb{R}} (x - [x])\ \mathrm{d}\mu$, gdzie

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n+1/n};$$

(xi)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{n^2x + 2}{n^2x + n + 3}\ \mathrm{d}\lambda(x) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]} \frac{n}{xn^2 + 3}\ \mathrm{d}\lambda(x).$$

5.5.17 Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie mierzalną funkcją na przestrzeni miarowej (X, Σ, μ). Wtedy wzór $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$ definiuje miarę borelowską na $\mathbb{R}$, por. Zadanie 16 z poprzedniego rozdziału (taka miara w probabilistyce nazywa się rozkładem zmiennej losowej).

Udowodnić, że $\int_X f\ \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} x\ \mathrm{d}\nu(x)$ (o ile f jest całkowalna).

Wskazówka: Rozważyć najpierw $f = \chi_A$ dla $A \in \Sigma$; potem funkcje proste itd.

5.6 Problemy

5.6.A Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Dla dowolnego $Z \subseteq X$ piszemy $\mu^*(Z) = \inf\{\mu(A) : A \in \Sigma, Z \subseteq A\}$. Zauważyć, że μ^* jest miarą zewnętrzną (jest przeliczalnie podaddytywna i monotoniczna), ale na ogół nie jest addytywna.

Udowodnić, że dla ustalonego $Z \subseteq X$ wzór $\nu(A \cap Z) = \mu^*(A \cap Z)$ definiuje miarę na σ–ciele $\{A \cap Z : A \in \Sigma\}$ podzbiorów Z.

5.6.B Istnieje przestrzeń metryczna $Z \subseteq [0, 1]$ i probabilistyczna miara ν na $Bor(Z)$, taka że $\nu(K) = 0$ dla $K \subseteq Z$ zwartych.

Wskazówka: Wziąć na początek $Z \subseteq [0, 1]$ niemierzalny w sensie Lebesgue'a i miarę ν z poprzedniego problemu.

5.6.C Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną. Jak wiemy, $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ definiuje relację równoważności. Niech $\mathfrak{B} = \{[A] : A \in \Sigma\}$ oznacza rodzinę klas abstrakcji tej relacji.

Zauważyć, że na $\mathfrak{B}$ można wprowadzić naturalne działania

$$[A] \vee [B] = [A \cup B], \quad [A] \wedge [B] = [A \cap B], \quad -[A] = [A^c].$$

Wtedy $\mathfrak{B}$ staje się algebrą Boole'a $(\mathfrak{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ (to znaczy, że wprowadzone działania maja takie same własności jak "zwykłe" działania mnogościowe; $0 = [\emptyset]$, $1 = [X]$). Tak zdefiniowana algebrę nazywamy algebrą miary.

5.6.D Sprawdzić, że algebra miary $\mathfrak{B}$ jest przestrzenią metryczną, gdzie metrykę zadajemy wzorem $d([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$. Udowodnić, że metryka ta jest zupełna.

5.6.E Algebra miary Lebesgue'a λ na $[0, 1]$ jest przestrzenią ośrodkową.