6.6 Zadania

6.6.1 Sprawdzić, że $|a+b|^p \leqslant 2^{p/q}(|a|^p+|b|^p)$, gdzie $1/p+1/q=1$; wynioskować stąd, że $L_p(\mu)$ jest przestrzenią liniową.

6.6.2 Sprawdzić, że następujące fakty dowodzi się analogicznie jak dla $L_1(\mu)$ ($p \geqslant 1$)

(i) $L_p(\mu)$ jest zupełna;

(ii) funkcje proste leżą gęsto w $L_p(\mu)$;

(iii) $C[0,1]$ leży gęsto w $L_p[0,1]$.

6.6.3 Ustalić, czy zachodzą jakieś inkluzje pomiędzy $L_p(\mathbb{R})$ dla różnych p. A jak jest w przypadku $L_p[0,1]$?

6.6.4 Ustalić, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe zawsze, a które w przypadku $\mu(X)<\infty$; f_n jest tutaj ciągiem funkcji mierzalnych.

(i) jeśli f_n są całkowalne i zbieżne jednostajnie do f to f_n zbiegają w L_1;

(ii) jeśli f_n są całkowalne i zbieżne niemal jednostajnie do f to f_n zbiegają w L_1;

(iii) jeśli $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ i $\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$ to granica jest całkowalna;

(iv) jeśli f_n zbiegają w $L_1(\mu)$ to pewien podciąg zbiega prawie wszędzie;

(v) jeśli f_n są całkowalne i zbieżne do 0 prawie wszędzie to f_n są jednakowo całkowalne;

(vi) jeśli $|f_n| \leqslant g$, gdzie $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ to f_n są jednakowo całkowalne;

(vii) jeśli $|f_n| \leqslant g$, $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$, f_n zbiegają prawie wszędzie to f_n zbiegają w $L_1(\mu)$

(viii) jeśli $f_n \in L_2(\mu) \cap L_1(\mu)$ i f_n zbiegają w $L_1(\mu)$ to f_n zbiegają w $L_2(\mu)$; na odwrót?

(ix) (viii) przy dodatkowym założeniu, że f_n są wspólnie ograniczone.

6.6.5 Zauważyć, że dla funkcji $f : X \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i \cdot f_2$, jej mierzalność jest równoważna mierzalności części rzeczywistej f_1 i urojonej f_2. Ponadto, f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy f_1, f_2 są całkowalne.

6.6.6 Dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) oznaczmy przez $||f||_\infty$ jej istotne supremum, to znaczy

$$||f||_\infty = \inf\{\sup_{X\setminus A} |f| : \mu(A) = 0\}.$$

Wykazać, że $||\cdot||_\infty$ jest normą zupełną na przestrzeni $L_\infty(\mu)$, złożonych z tych funkcji, dla których $||f||_\infty < \infty$, po utożsamieniu funkcji równych prawie wszędzie.

6.6.7 Wykazać, że dla $f \in L_\infty[0,1]$ zachodzi wzór $\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

6.6.8 Sprawdzić, że przestrzeń $L_\infty[0,1]$ nie jest ośrodkowa.

6.6.9 O mierze μ powiemy że jest ośrodkowa jeśli $L_1(\mu)$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wykazać, że μ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$ że dla każdego $A \in \Sigma$

$$\inf\{\mu(A \triangle S) : \ S \in \mathcal{S}\} = 0.$$

6.7 Problemy

6.7.A Niech (X, Σ, μ) będzie bezatomową przestrzenią probabilistyczną. Wykazać, że istnieje mierzalna funkcja $f : X \to [0,1]$, taka że $f[\mu] = \lambda$.

Wskazówka: Wystarczy zbudować $g : X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, taką że $g[\mu] = \nu$, gdzie ν jest miarą Haara na zbiorze Cantora. Wybrać dla każdego n rozłączne zbiory $A_\varepsilon \in \Sigma$, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, tak że $\mu(A_\varepsilon) = 2^{-n}$ i $A_{\varepsilon\frown 0} \cup A_{\varepsilon\frown 1} = A_\varepsilon$.

6.7.B Wykazać, że jeśli (X_1, Σ_1, μ_1) i (X_2, Σ_2, μ_2) są dwiema ośrodkowymi bezatomowymi przestrzeniami probabilistycznymi, to odpowiadające im algebry Boole'a $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ są izomorficzne w następującym sensie: istnieje zachowująca działania boolowskie bijekcja $g : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, która jest izometrią $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ jako przestrzeni metrycznych.

Wskazówka: Wybrać $A_\varepsilon \in \Sigma_1$, takie jak w problemie A oraz takie że rodzina $\mathcal{S}_1$ wszystkich sum skończonych A_ε, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$ jest gęsta. Analogicznie wybrać taką rodzinę $B_\varepsilon \in \Sigma_2$.

Określić $g([A_\varepsilon]) = [B_\varepsilon]$ i przedłużyć g na $\mathcal{S}_1$ z zachowaniem działań; wtedy g jest izometrią i przedłuża się na domknięcie dziedziny.

6.7.C Wykazać, że dla przestrzeni miarowych z poprzedniego problemu $L_p(\mu_1)$ jest liniowo izometryczne z $L_p(\mu_2)$ (gdzie $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Wskazówka: Określić odwzorowanie liniowe $T : L_p(\mu_1) \to L_p(\mu_2)$ najpierw na funkcjach prostych, korzystając z poprzedniego zadania. Wykorzystać fakt, że izometrię można przedłużać na domknięcie dziedziny.

6.7.D (dla znających ultrafiltry). Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolnym ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. Udowodnić, że zbiór $Z \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, gdzie

$$Z = \{\chi_F : \ F \in \mathcal{F}\},$$

jest zbiorem niemierzalnym względem miary Haara.

Wskazówka: Taki zbiór jest zdarzeniem resztowym więc gdyby był mierzalny, to miałby miare 0 bądź 1; rozważyć przesunięcie Z o element 1 (względem działania grupowego).

6.7.E Ile jest różnych miar (skończonych, σ–skończonych, dowolnych) na σ–ciele $Bor(\mathbb{R})$?