Funkcje tworzące

1. Niech $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 1/(1 + x + x^2)$. Obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu a_n.

2. Funkcja tworząca ciągu $a_n = 1$ to $1 + x + x^2 + \ldots$ czyli $1/(1 - x)$ w zwartej postaci. Podobnie, jak już sprawdziliśmy, $1 + 2x + 3x^2 + \ldots = 1/(1 - x)^2$.

Znaleźć funkcje tworzące (w zwartej postaci) dla podanych ciągów $a_0, a_1, \ldots$

(i) $1, q, q^2, q^3, \ldots$;

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$;

(iii) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \ldots, (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \ldots$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

(iv) $0, 0, 0, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$;

(v) $1/0!, 1/1!, 1/2!, \ldots, 1/n!, \ldots$;

(vi) $1/0!, -1/1!, 1/2!, \ldots, (-1)^n/n!, \ldots$;

(vii) $1, 3, 4, 9, 8, 27, 16, 81, \ldots$;

(viii) $1, 2, 4, 1, 3, 8, 1, 4, 16, 1, 5, 32, \ldots$.

3. Znaleźć wzór na $\sum_n nx^n$.

Wskazówka: $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + (x^2 + 2x^3 + \ldots)$.

4. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu kolejnych kwadratów liczb naturalnych $0, 1, 4, \ldots, n^2, \ldots$.

Wskazówka: Warto obliczyć $f(x) - xf(x)$.

5. Stosując powyższe chwyty znaleźć funkcję tworzące (w zwartej postaci) ciągów

(i) $a_n = n^3$;

(ii) $b_n = \binom{n}{2}$;

(iii) $c_n = \binom{n}{3}$.

6. Niech $F(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Wyznaczyć (w zależności od $F(x)$ funkcję tworzącą ciągów $b_n = na_n$ i $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Wskazówka: Nie zaczynaj od tego zadania.

Funkcje tworzące i rekurencje

7. Niech S będzie multizbiorem $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, gdzie a_n jest liczbą n-kombinacji S przy podanych warunkach

(i) każdy element występuje nieparzystą ilość razy;

(ii) każdy element występuje liczbę razy podzielną przez 3;

(iii) element e_1 nie pojawia się, a e_2 pojawia się co najwyżej raz;

(iv) element e_1 pojawia się 1, 3 lub 11 razy, natomiast element e_2 pojawia się 2, 4 lub 5 razy;

8. Rozważmy wielkości a_n, b_n, c_n, określające, na ile sposobów można wydać n gr za pomocą monet

(a) 1gr ;

(b) 1gr i 2gr;

(c) 1gr, 2gr, 5gr.

Podać wzory na a_n i b_n. Obliczyć (na piechotę) c_{12}. Dla każdego ciągu wyznaczyć jego funkcję tworzącą.

9. Rozwiązać rekurencję $a_{n+1} = 3a_n + n$, $a_0 = 0$, rozważając funkcję tworzącą ciągu.

Wskazówka: Metoda jak na wykładzie; wskazówka jest też w GAL/zadanie 46.

10. Postępując jak wyżej rozwiązać rekurencje

(i) $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$, $a_0 = 0$;

(ii) $b_{n+1} = b_n + n^2$, $b_0 = 0$.

11. Rozwiązać rekurencję $a_0 = 2020$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$.

Wskazówka: To, dla odmiany, jest banalne:-)

Dodatek: zbieżność szeregów potęgowych

(A) Szereg potęgowy $\sum_n a_n x^n$ zmiennej rzeczywistej jest zbieżny dla $|x| < R$ i rozbieżny dla $|x| > R$, gdzie R (promień zbiezności szeregu) wyliczamy ze wzoru $1/R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (może wyjść $R = +\infty$).

Zauważyć że jest to twierdzenie stosunkowo proste: o granicy górnej ciągu c_n wystarczy wiedzieć, że warunek $\limsup_n c_n \leqslant \gamma$ oznacza że dla dowolnego $\varepsilon > 0$, nierówność $c_n < \gamma + \varepsilon$ zachodzi dla prawie wszystkich n. Jeżeli więc $|x| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ to dla pewnego $q < 1$ nierówność $|a_n x^n| \leqslant q^n$ zachodzi dla prawie wszystkich n.

(B) Zauważyć, że jeżeli R jest promieniem zbieżności szeregu $f(x) = \sum_n a_n x^n$ i $0 < r < R$ to szereg jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[-r, r]$. Można stąd wywnioskować, że $f'(x) = \sum_n n a_n x^{n-1}$.